

Corso di laurea in Matematica
Algebra 2
a.a. 2025-26
Scritto 16 settembre 2026

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Dare la definizione di ideale massimale di un anello A commutativo unitario. Provare poi che se I è un ideale proprio di A tale che ogni elemento di A che non sta in I è invertibile, allora I è massimale.
2. Trovare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$.
3. Si consideri il seguente insieme di polinomi di $\mathbb{Z}[x]$:

$$P = \{x^3 - 7x^2 + 3ax + b \mid a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Provare che in P ci sono infiniti polinomi riducibili e infiniti polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$.

4. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ algebrici su $\mathbb{Q}$. Provare che $\mathbb{Q}[a, b]$ è un campo.
5. Sia $A = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}\}$, cioè A è l'insieme di tutte le applicazioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$. In A si definisca la somma e il prodotto rispettivamente con: $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ e $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$ (per ogni $n \in \mathbb{Z}$); mostrare brevemente che A risulta un anello commutativo unitario. Si considerino poi i seguenti due elementi di A : f_1 è l'applicazione che in $n = -1$ vale 1 e in $n \neq -1$ vale 0 e f_2 è tale che in $n = 1$ vale 1 e vale 0 altrimenti. Sia $I = (f_1, f_2)$ l'ideale generato da f_1 e f_2 . Provare che I è un ideale principale.

1) $I \subseteq A$ m'idea massimale e $I \neq A$ e se $I \subsetneq J$, allora $J = A$ (con J ideale). Sia ora I con la proprietà detta. Sia J ideale t.c. $I \subsetneq J$, ma allora $a \in J \setminus I$. Poiché a è invertibile, cioè $\exists b \in A : ab = 1$ allora $1 = ab \in J$. Allora $J = A$.

2). Sia $a = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$. Allora $a^3 = 3 + 3\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9^2} + 9$
cioè $a^3 = 12 + 3\sqrt[3]{3^4} + 3\sqrt[3]{3^5} = 12 + 9\sqrt[3]{3} + 9\sqrt[3]{9} = 12 + 9(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})$
Quindi $a^3 = 12 + 9a$, pertanto
$$a^3 - 9a - 12 = 0$$

e quindi a è algebrico su $\mathbb{Q}$.

Se proviamo che il polinomio $x^3 - 9x - 12$ è irriducibile, esso è anche il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

Se $x^3 - 9x - 12$ fosse riducibile, avrebbe una radice razionale (coefficienti intere). Le uniche candidate sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Si vede subito che nessuno di questi numeri è radice, quindi $x^3 - 9x - 12$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

$$3) \quad P = \{x^3 - 7x^2 + 3ax + b \mid a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Per vedere che in P ci sono infiniti polinomi irriducibili, si può applicare il criterio di Eisenstein. Ad esempio si può scegliere $b=1$ e $a=7k$, oppure $a=0$ $b=7k+1$ o $a=7k$ $b=7k+2 \dots$

Per vedere che in P ci sono infiniti polinomi riducibili, possiamo ad esempio scegliere che il polinomio abbia $x=1$ come radice, quando deve essere $1 - 7 + 3a + b = 0$, cioè $b = 6 - 3a$. In questo modo si ottengono gli infiniti polinomi $x^3 - 7x^2 + 3ax + 6 - 3a$ che sono tutti riducibili.

4) Se a è algebrico su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[a]$ è un campo K che contiene $\mathbb{Q}$.

Se b è algebrico su $\mathbb{Q}$, allora b è algebrico su K , quindi $K[b]$ è un campo. Ma $\mathbb{Q}[a, b] = \mathbb{Q}[a][b] = K[b]$, quindi $\mathbb{Q}[a, b]$ è un campo.

5) A è gruppo abeliano: la somma è associativa, commutativa,

l'elemento neutro è l'applicazione $0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ t. ch. $0(n) = 0_{\mathbb{Q}} \forall n$.

l'opposto di f è dato da $-f$ t. ch. $(-f)(n) = -f(n) \forall n$.

Il prodotto è associativo, commutativo, l'elemento neutro è $1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dato da $1(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Siam ora f_1 e f_2 come nell'enunciato e sia $I = (f_1, f_2)$, quindi gli elementi di I sono della forma $\alpha f_1 + \beta f_2$ con $\alpha, \beta \in A$.

Pertanto

$$(\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2)(n) = \begin{cases} \alpha(-1) & \text{se } n = -1 \\ \beta(1) & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo l'applicazione $g = f_1 + f_2$. Ovviamente $g \in I$, inoltre

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = -1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente $(g) \subseteq I$, inoltre, se

$$\gamma(n) = \begin{cases} \alpha(-1) & \text{se } n = -1 \\ \beta(-1) & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \text{vale: } \alpha f_1 + \beta f_2 = \gamma g$$

Pertanto $\alpha f_1 + \beta f_2 \in (g)$ e quindi $(g) = I$.

In alternativa, abbiamo che $f_1 = f_1 \cdot g$ e $f_2 = f_2 \cdot g$ quindi

$f_1, f_2 \in (g)$ cioè $I \subseteq (g)$.