

ALGEBRA 2
Esercizi 3 - 15 ottobre 2026

1. Richiamo sul prodotto di due anelli: Siano A e B sono due anelli (commutativi, unitari) e sia $C = A \times B$ il prodotto cartesiano di A e B (quindi gli elementi di C sono le coppie (a, b)). Su C si definiscano le seguenti operazioni:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Si provi che C , con queste due operazioni, è un anello commutativo unitario.

2. Provare che $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_{60}$ non sono isomorfi. Più in generale, siano $a, b \in \mathbb{N}$ e sia $d = \text{mcd}(a, b)$ con $d > 1$. Provare che $\mathbb{Z}_{ab}$ non è isomorfo a $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$.
3. Sia G un gruppo con 91 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha G .
4. Sia G un gruppo con un elemento x di ordine 2 e un elemento y di ordine 3; si supponga inoltre che $yx = xy^2$. Provare che G ha 6 elementi (un modo per procedere, potrebbe essere quello di vedere che l'insieme $\{1, y, y^2, x, xy, xy^2\}$ è chiuso per prodotti). Sia poi D_3 il gruppo diedrale, cioè D_3 è il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero. Indichiamo con 1, 2, 3 i tre vertici di un triangolo equilatero, indichiamo con σ la rotazione di 120° gradi in senso orario centrata nel baricentro del triangolo e con τ la riflessione rispetto all'altezza verticale del triangolo e supponiamo che i vertici siano numerati in modo che σ e τ corrispondano alle permutazioni:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provare che G è isomorfo a D_3 mostrando che l'applicazione che manda x in τ e y in σ può essere estesa ad un isomorfismo di gruppi.

5. Sia C un gruppo ciclico di ordine 2 (quindi C ha due elementi, 1 e a , con $a^2 = 1$) e sia S_3 il gruppo delle permutazioni di 3 elementi. Sia $G = C \times S_3$ (può essere conveniente indicare gli elementi di S_3 con 1, x_1, x_2, x_3, y, y^2 dove x_1 è il ciclo (1, 2), così $x_2 = (1, 3)$, $x_3 = (2, 3)$ e $y = (1, 2, 3)$).

- Trovare tutti gli elementi di ordine 2 di G ;
- trovare tutti gli elementi di ordine 3 di G ;
- trovare tutti i p -Sylow sottogruppi di G (con $p \in \{2, 3\}$);
- verificare che i dati trovati sono coerenti con i teoremi di Sylow.

6. Sia

$$C_n = \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Quindi C_n è un sottoinsieme del gruppo $(\mathbb{C}, \cdot)$. Provare che è un sottogruppo ed è ciclico di ordine n .

7. Sia $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici quadrate invertibili di ordine 2 fatto rispetto al prodotto righe per colonne. Sia poi

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dire chi è il gruppo ciclico generato da g .

8. Nel gruppo S_4 delle permutazioni di $1, 2, 3, 4$ si considerino i seguenti due cicli: $(1, 2, 4)$ e $(1, 4)$. Si provi che generano un gruppo che è isomorfo a S_3 .