

ALGEBRA 2
Esercizi 1 - 1 ottobre 2026

0. (Esercizio 0). Trovare eventuali errori in questo elenco di esercizi o negli esercizi delle prossime settimane.

1. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si definisca su G la seguente relazione:

$$g \mathcal{R} h \text{ se e solo se } gh^{-1} \in H$$

Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza (quindi provare che è riflessiva, simmetrica e transitiva).

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Se $g \in G$, ricordare che con Hg si indica l'insieme $\{hg \mid h \in H\}$. Provare che $Hg_1 = Hg_2$ se e solo se $g_1g_2^{-1} \in H$.

3. Sia g un elemento di un gruppo $(G, \cdot)$. Provare che l'inverso di g è unico (provare quindi che se g_1 e g_2 sono inversi di g , allora $g_1 = g_2$).

4. Sia G un gruppo moltiplicativo e X un insieme, sia poi M l'insieme di tutte le applicazioni da X in G , cioè $M = \{f \mid f : X \longrightarrow G\}$. Dati $f, g \in M$ si definisca il prodotto $f \cdot g$ nel seguente modo: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in X$. Provare che $(M, \cdot)$ è un gruppo. Provare poi che, se G è abeliano, allora anche M lo è.

5. Si consideri l'insieme $C_7 \subseteq \mathbb{C}$ definito da:

$$C_7 = \left\{ \cos(\theta) + i \sin(\theta) \mid \theta = \frac{2\pi k}{7}, k = 0, 1, \dots, 6 \right\}$$

e in esso si consideri il prodotto dato dal prodotto di numeri complessi. Provare che C_7 è un gruppo con 7 elementi ed è isomorfo a $(\mathbb{Z}_7, +)$ (suggerimento: si trovi un generatore di C_7). In particolare, C_7 è un gruppo ciclico. Se al posto del numero 7 si scrive n (e al posto di 6 si scrive $n-1$), cosa cambia? Quali punti del piano complesso corrispondono agli elementi di C_7 (o di C_n ?).

6. Sia A un anello commutativo, unitario e I un ideale di A . Provare che se definiamo in A/I il prodotto in questo modo:

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

il prodotto è ben definito e il gruppo quoziente A/I rispetto a questo prodotto diventa un anello commutativo unitario.

7. Dimostrare che in un anello A vale: $0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in A$.