ALGEBRA 2

Esercizi 9 - 21 novembre 2024

1. Scrivere la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio:

$$f(x) = x^{10} + 2x^5 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

(aiutarsi con il metodo di Berlekamp).

2. Trovare la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio:

$$x^9 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

(aiutarsi con il metodo di Berlekamp).

3. Quanti sono i polinomi di grado 3 di $\mathbb{Z}_3[x]$ tali che $D(D(f)) = 0$?

4. Sia $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Calcolare il $\operatorname{mcd}(f, D(f))$ e provare così che $f(x)$ ha un fattore multiplo.

5. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio

$$x^{27} + 2x^{36} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

6. Sia I un ideale di un anello A e sia $I[x]$ il più piccolo ideale di $A[x]$ che contiene I. Provare che

$$I[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in I\}.$$

Provare poi che l'anello quoziente $A[x]/I[x]$ è isomorfo all'anello di polinomi $(A/I)[x]$.

7. (Facoltativo) Dimostrare che il polinomio x^3+x^2+x+1 è sempre riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, per ogni primo p (tranne che per $p = \ldots$).[1]

[1]Suggerimento: Ad esempio osservare che $x^4 - 1$ ha almeno gli zeri 1 e -1 in $\mathbb{Z}_p[x]$/.