

ALGEBRA 2
Esercizi 4 - 22 ottobre 2026

1. Sia A un anello commutativo unitario. Provare che A è un campo se e solo se gli unici ideali di A sono (0) e A (l'ideale A è anche indicato con (1)).
2. Provare che se A è un dominio e $p \neq 0$ e non unitario è un elemento di A , allora l'ideale (p) è primo se e solo se p è primo.
3. Sia A un PID e siano $a, b \in A$ non entrambi nulli. Si consideri l'ideale (a, b) (l'ideale generato da a e b). Poiché esso è principale, sarà della forma (d) . Provare che d è il massimo comun divisore di a e b . Provare che esistono $\alpha, \beta \in A$ tali che $d = \alpha a + \beta b$ (identità di Bezout per PID).
4. Sia A un dominio e siano $p, q \in A$ irriducibili. Provare che p è associato a q se e solo se p divide q .
5. Sia A un anello e siano I e J due ideali di A . Provare che l'ideale (I, J) , cioè il più piccolo ideale che contiene I e J , è dato dall'insieme

$$\{a + b \mid a \in I, b \in J\}.$$

Tale ideale si indica con $I + J$.

6. Provare che un ideale massimale $\mathcal{M}$ di un anello A è primo, mostrando che *verifica la definizione di ideale primo*.
7. Siano $I = (a)$ e $J = (b)$ due ideali di $\mathbb{Z}$. Dire chi è un generatore dell'ideale $I \cap J$ e chi è un generatore di $I + J$ (per la definizione di $I + J$ si veda l'esercizio 5).
8. Si consideri l'anello dei polinomi $P = \mathbb{Z}_4[x]$. Quanti polinomi di grado n ci sono in P ? Trovare poi tutti i divisori dello zero di P di grado 1.
9. Si trovino tutti i polinomi invertibili e tutti i divisori dello zero di $\mathbb{Z}_6[x]$.¹
10. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio f per un polinomio g in $A[x]$ (dove A è un anello) richiede che il coefficiente direttivo di g sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$: $f = 4x + 1, g = 2x + 1$. Scrivere $f = qg + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(g)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di g non può essere invertibile).

¹Può essere utile considerare l'omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}_6[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x]$ tale che $\phi([a]_6) = [a]_2$, $\phi(x) = x$ e l'omomorfismo $\psi : \mathbb{Z}_6[x] \rightarrow \mathbb{Z}_3[x]$ tale che $\psi([a]_6) = [a]_3$, $\psi(x) = x$, dove $[a]_m$ significa la classe di a modulo m .