Algebra 2

Esercizi 1 - 26 settembre 2025

0. (Esercizio 0). Trovare eventuali errori in questo elenco di esercizi o negli esercizi delle prossime settimane.

1. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si definisca su G la seguente relazione:
$$g\,\mathcal{R}\,h \text{ se e solo se } gh^{-1} \in H$$
Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza (quindi provare che è riflessiva, simmetrica e transitiva).

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Se $g \in G$, ricordare che con Hg si indica l'insieme $\{hg \mid h \in H\}$. Provare che $Hg_1 = Hg_2$ se e solo se $g_1g_2^{-1} \in H$.

3. Sia G un gruppo, H un sottogruppo normale di G e sia U un sottogruppo di G/H. Provare che $\pi^{-1}(U)$ è un sottogruppo di G che contiene H (dove $\pi : G \longrightarrow G/H$ è l'epimorfismo canonico).

4. Sia G un gruppo e X un insieme, sia poi M l'insieme di tutte le applicazioni da X in G, cioè $M = \{f \mid f : X \longrightarrow G\}$. Dati $f, g \in M$ si definisca il prodotto $f \cdot g$ nel seguente modo: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in X$. Provare che $(M, \cdot)$ è un gruppo.

5. Si consideri l'insieme $C_n \subseteq \mathbb{C}$ definito da:
$$C_n = \left\{ \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \;\middle|\; \theta = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$
e in esso si consideri il prodotto dato dal prodotto di numeri complessi. Provare che C_n è un gruppo con n elementi ed è isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$ (suggerimento: si trovi un generatore di C_n).

6. Sia G un gruppo e siano H_γ ($\gamma \in \Gamma$) sottogruppi di G, dove Γ è un insieme di indici. Provare che allora
$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$$
è un sottogruppo di G. Provare inoltre che se H_γ è normale per ogni $\gamma \in \Gamma$, allora anche $\cap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ è normale in G.