

ALGEBRA 2
Esercizi 10 - 28 novembre 2025

1. Siano K, L campi, con L estensione di K . Sia $a \in L$. Provare che per ogni $q \in K$ vale: $K[a] = K[a + q]$ e $K(a) = K(a + q)$. Provare poi che se a è algebrico su K di grado n , anche $a + q$ è algebrico su K di grado n .
2. Siano K, L campi, con L estensione di K . Si supponga che $[L : K] = p$ con p numero primo. Provare che non esiste nessun campo K' che sia intermedio tra K ed L (cioè che sia estensione di K e sottocampo di L), oltre ovviamente a K ed L .
3. Sia a una soluzione (in \mathbb{C}) del polinomio $x^6 + 2x^2 + 6$. Provare che $[\mathbb{Q}[a] : \mathbb{Q}] = 6$. Trovare poi un elemento $b \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbb{Q}[b]$ sia un campo intermedio tra \mathbb{Q} e $\mathbb{Q}[a]$ e diverso da entrambi.
4. Sia $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ dato da $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Costruire un campo L , estensione di \mathbb{Z}_3 , che sia campo di riducibilità completa di f . Scrivere la fattorizzazione di f in $L[x]$.
5. Siano K ed L campi, con L estensione di K . Sia $a \in L$ algebrico su K di grado n (cioè il suo polinomio minimo ha grado n). Provare che $10a$ è algebrico su K . Che grado ha $10a$ su K ?
6. Provare che $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ è algebrico su \mathbb{Q} e trovare il suo grado.
7. Siano K, L campi, con L estensione di K . Sia $a \in L$ tale che l'anello $K[a]$ risulta essere un campo. Provare che allora a è algebrico su K .
(Suggerimento: l'elemento a^{-1} sta in $K[a]$, quindi è esprimibile come un polinomio in $a \dots$).