

ALGEBRA 2  
Esercizi 6 - 30 ottobre 2024

1. Dimostrare che un polinomio  $f \in \mathbb{Z}_2[x]$  ha un fattore lineare se e solo se ha termine noto nullo o ha un numero pari di monomi.
2. Trovare tutti i polinomi riducibili e irriducibili di grado 2 di  $\mathbb{Z}_5[x]$ .
3. Sia  $f \in \mathbb{Z}[x]$  un polinomio primitivo (quindi il massimo comun divisore dei suoi coefficienti vale 1). Si supponga che  $f = gh$  in  $\mathbb{Z}[x]$ . Provare allora che  $g$  e  $h$  sono primitivi.
4. Siano  $f, g \in \mathbb{Z}[x]$  due polinomi primitivi e siano  $a, b \in \mathbb{Z}$  non nulli tali che  $af = bg$ . Provare che allora  $a = \pm b$  e  $f = \pm g$ .
5. Sia  $a \in \mathbb{Z}$  non nullo e non unitario. Provare che  $a$  è irriducibile nell'anello  $\mathbb{Z}$  se e solo se  $a$  è irriducibile nell'anello  $\mathbb{Z}[x]$ .
6. Si consideri il polinomio  $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ . Provare che  $f$  è irriducibile. Sia poi  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  la proiezione canonica. Da  $\pi$  si costruisca l'omomorfismo di anelli  $\phi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x]$  ottenuto estendendo  $\pi$  (spiegare come) e si consideri poi il polinomio  $g = x^3 - 7x^2 + 4x - 11 \in \mathbb{Z}[x]$ . Provare che  $g$  è irriducibile in  $\mathbb{Z}[x]$  (suggerimento: usare  $\phi(g)$ ...).
7. Generalizzando l'esercizio precedente, sia  $p$  un numero primo e si consideri l'omomorfismo di anelli  $\phi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x]$  che estende la proiezione canonica  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ . Provare che se  $g \in \mathbb{Z}[x]$  è un polinomio di grado  $n$  tale che  $\phi(g)$  è ancora un polinomio di grado  $n$  e se  $\phi(g)$  è irriducibile, allora  $g$  è irriducibile.
8. A completamento dell'esercizio precedente, trovare un esempio che mostri che l'ipotesi che il grado di  $\phi(g)$  deve essere lo stesso del grado di  $g$  è essenziale. In altre parole, trovare un esempio che mostri che ci sono polinomi  $g \in \mathbb{Z}[x]$  riducibili tali che  $\phi(g) \in \mathbb{Z}_p[x]$  è irriducibile ( $\phi$  definita come nell'esercizio precedente).