

ALGEBRA 2
Esercizi 7 - 8 novembre 2025

1. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo dato da $\phi(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 3x + 1$ (e poi esteso con il teorema di estensione). Provare che ϕ è un isomorfismo e trovare il suo inverso.
2. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ un omomorfismo di anelli. Provare che $\phi(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$. Si supponga poi che $\phi(x)$ sia un polinomio di grado maggiore di 1. Provare che allora ϕ non può essere suriettivo.
3. Alla luce dei due esercizi precedenti, si riesce a dire chi sono tutti e soli gli automorfismi di $\mathbb{Q}[x]$?
4. Nell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 3)$ trovare dei rappresentanti canonici (i.e. polinomi di grado ≤ 2) per le seguenti classi:

$$[x^4 - 3x + 5], \quad [2x^5 + 3x^4 - x], \quad [x^9]$$

5. Trovare l'esempio di un anello A in cui ci sia un elemento a tale che $a^3 = 3a + 6$ (ricordare che in un anello qualunque, $3a$ significa $a + a + a$, mentre 6 significa $1_A + 1_A + \dots + 1_A$ (6 volte)). Trovare poi un campo K , un dominio d'integrità D e un anello non dominio A in cui ci sia un elemento a tale che $a^5 = 3a^2 + 3$.
6. Usando il metodo di Berlekamp, trovare la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio $x^4 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
7. Usando il metodo di Berlekamp, dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
8. Usando il metodo di Berlekamp, (ma non solo!) scomporre in fattori irriducibili il polinomio $x^{20} + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
9. Usando il metodo di Berlekamp, fattorizzare $x^2 - q \in \mathbb{Z}_p[x]$ dove p è un numero primo e $q \neq 0, 1$. Dedurre che in \mathbb{Z}_p un elemento $q \neq 0, 1$ ha una radice quadrata se e solo se $q^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.