ALGEBRA 2
Esercizi 2 - 8 ottobre 2026

1. Provare che in $\mathbb{Z}_m$ un elemento $[a]$ è divisore dello zero se e solo se a ed m non sono primi tra loro.

2. Calcolare $\phi(2^n)$ (dove ϕ è la funzione totiente di Eulero).

3. Siano p e q due numeri primi. Calcolare $\phi(pq)$ (anche qui ϕ indica la funzione totiente).

4. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi $\mathrm{mcd}\,(a, b) = 1$). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se a divide bc, allora a divide c. (Trovare una soluzione al problema usando l'identità di Bezout).

5. Usare il risultato dell'esercizio precedente per provare che se a e b sono due interi primi tra loro (anche detti *coprimi*) e se entrambi dividono un numero intero m, allora il loro prodotto divide m. Fornire un esempio per mostrare che il risultato non è vero se a e b non sono coprimi.

6. Calcolare il $\mathrm{mcd}\,(20, 32)$ usando le divisioni successive. Detto d tale massimo comun divisore, trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ in modo che valga $d = 20\alpha + 32\beta$. Trovare poi tutte le soluzioni (a, b) dell'equazione $20a + 32b = d$ (con $a, b \in \mathbb{Z}$).

7. Sia A un anello commutativo unitario e I un ideale di A. Sia J un ideale di A che contiene I. Quindi, in particolare, I è un sottogruppo di J e quindi si può fare il gruppo quoziente J/I che è un sottogruppo di A/I. Provare che è un ideale di A/I. Sia poi $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proiezione canonica. Se U è un ideale di A/J, provare che $\pi^{-1}(U)$ (cioè $\{a \in A \mid \pi(a) \in U\}$) è un ideale di A che contiene I. Verificare infine che $\pi^{-1}(J/I) = J$ e $\pi^{-1}(U)/I = U$. In conseguenza, concluse queste verifiche, si è provato che vi è una biiezione tra l'insieme degli ideali J di A che contengono I e l'insieme degli ideali U di A/I data da:

$$J \mapsto J/I$$

la cui inversa è:

$$U \mapsto \pi^{-1}(U).$$

8. Calcolare il resto della divisione di 8^{1234} quando viene diviso per 5 e quando viene diviso per 9.