Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2025–26
Scritto 10 febbraio 2026

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Provare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ il numero
$$A(n) = 4n^{18} + n^{15} + 2n^7 + 3n^6 - n^3 + 5n + 21$$
è divisibile per 7. Per quali valori di n, $A(n)$ risulta divisibile per 3?

2. Sia G un gruppo di 91 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha G.

3. Sia A un anello commutativo, unitario, finito. Provare che gli elementi di A o sono invertibili o sono divisori dello zero. Dare l'esempio di un anello in cui un elemento non è invertibile e non è divisore dello zero.

4. Sia $F : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli dato da $F(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $F(x) = \sqrt{2}$ e poi esteso su tutto $\mathbb{Q}[x]$ nell'unico modo possibile. Trovare il nucleo di F.

5. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Spiegare perché K è un campo perfetto. Trovare un elemento $a \in K$ tale che $a^3 = [2x + 1]$.