Corso di laurea in Matematica
Algebra 2
a.a. 2024–25
Scritto 10 giugno 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ un omomorfismo di gruppi. Provare che se G_2 è abeliano, allora anche $G_1/\ker(\phi)$ lo è.

2. Sia A un dominio d'integrità e sia $I = (a)$ un ideale principale e proprio di A, con $a \neq 0$. Provare che l'ideale I è primo se e solo se l'elemento $a \in A$ è primo.

3. Sia K un campo, siano $f(x), g(x) \in K[x]$ due polinomi entrambi di grado n. Si supponga che esistano $a_0, \dots, a_n \in K$ a due a due distinti tali che $f(a_i) = g(a_i)$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$. Provare che $f(x) = g(x)$.

4. Siano K, L due campi tali che L è un'estensione di K di grado m. Provare che se $a \in L$, allora a è algebrico su K di grado n ed inoltre n è un divisore di m.

5. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.