

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2024–25
Scritto 15 giugno 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo con 77 elementi. Quanti sono i sottogruppi di G ? Quanti di questi sono normali?
2. Dare la definizione di ideale massimale di un anello A commutativo unitario. Provare poi che se I è un ideale proprio di A tale che ogni elemento di A che non sta in I è invertibile, allora I è massimale.
3. Sia $P = \{x^3 + 5x^2 + ax + b \mid a, b \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ un insieme di polinomi. Provare che nell'insieme P ci sono infiniti polinomi riducibili e infiniti polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$.
4. Sia $a \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Provare che allora a è algebrico anche su \mathbb{Q} .
5. Usando i teoremi di Berlekamp, provare che il polinomio $x^5 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ è il prodotto di due fattori irriducibili distinti.