

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2025–26
Scritto 20 gennaio 2026

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Provare che G è un sottogruppo di $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. Descrivere le classi laterali di G in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e dire chi è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/G$.
2. Provare che $x^p + p - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile per ogni numero primo p .
3. Usando il metodo di Berlekamp, (ma non solo!) scomporre in fattori irriducibili il polinomio $x^{20} + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
4. Provare che l'elemento $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ è algebrico su \mathbb{Q} e trovare il suo polinomio minimo.
5. Siano K, L campi, con L estensione di K . Si supponga che $[L : K] = p$ con p numero primo. Provare che non esiste nessun campo K' che sia intermedio tra K ed L (cioè che sia estensione di K e sottocampo di L), oltre ovviamente a K ed L .