Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME _____ **N. Matricola** _____

Anno di Corso _____ **Laurea in Ingegneria** _____

Verifica delle competenze preliminari.

(*i*) Si scriva la definizione esplicita di $\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = -\frac{5}{7}$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni x appartenente al dominio della funzione, se $0 < |x - \frac{3}{2}| < \delta$ allora $|f(x) + \frac{5}{7}| < \varepsilon$.

(*ii*) Si calcoli il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\big(\log(x)\big)^2 - \operatorname{arctg}\,(2\sqrt{x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$

Si osservi che stiamo assumendo $x > 0$, quindi $x = \sqrt{x}\,\sqrt{x}$.

$$\sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}}\sqrt{x}\big(\log(x)\big)^2 - \frac{\operatorname{arctg}\,(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}} \longrightarrow -2$$

(*iii*) Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \displaystyle\int_{-2x}^{3x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt + x\log(x)$.

$$3\operatorname{sen}(9x^2) + 2\operatorname{sen}(4x^2) + \log x + 1$$

(*iv*) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^3)\,dx$

$$3\int_0^1 x\log(x)\,dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{3}{4}$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{|x|} + 2\,\mathrm{arctg}\,(x)$$

(i) Si calcolino i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$-\pi, +\infty, \pi$.

(ii) Si calcoli $f'(x)$, se ne studi il segno, si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativo di f.

Per $x < 0$ $f'(x) = \frac{3x^2+1}{x^2(1+x^2)}$, per $x > 0$ $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2(1+x^2)}$. Punti critici $x = 1$ (punto di minimo). f crescente su $]-\infty, 0[$ e su $[1, +\infty[$, f decrescente su $]0, 1]$.

(iii) Si calcoli $f''(x)$, se ne studi il segno, si determinino gli intervalli di convessità e i punti di flesso ascendente e discendente di f.

Per $x < 0$ si ha $f''(x) = -2\frac{3x^4+2x^2+1}{x^3(1+x^2)^2}$, per $x > 0$ $f''(x) = -2\frac{x^4-2x^2-1}{x^3(1+x^2)^2}$. $f''(x)$ è sempre positiva se $x < 0$. Quando $x > 0$ si ha $f''(x) > 0$ se $x \in]0, \sqrt{1+\sqrt{2}}[$ e $f''(x) < 0$ se $x > \sqrt{1+\sqrt{2}}$. La funzione è convessa su $]-\infty, 0[$ e su $]0, \sqrt{1+\sqrt{2}}]$; concava su $[\sqrt{1+\sqrt{2}}, +\infty[$. Il punto $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ è punto di flesso discendente.

(iv) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione

$$|x|\big(5 - 4\,\mathrm{arctg}\,(x)\big) = 2$$

Si chiede il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{5}{2}$. Osserviamo che il valore di f nel punto di minimo relativo $x = 1$ è $f(1) = 1 + \frac{\pi}{2} > 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Quindi avremo una sola soluzione.

COGNOME e NOME _____ **N. Matricola** _____

ESERCIZIO N. 3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ parametri (che andremo a definire successivamente) e si consideri la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sqrt{\operatorname{sen}(t^2)}\, dt & \text{se } a \le x < 0; \\ \int_0^x \operatorname{arcsen}(-t)\, dt & \text{se } 0 \le x \le b. \end{cases}$$

(i) Si determinino i parametri ottimali a, b (cioè $|a|$ e b più grandi possibile) in modo che la funzione sia definita su $[a, b]$.

$a = -\sqrt{\pi}$, $b = 1$.

(ii) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$, con particolare attenzione al punto $x = 0$.

$f'(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}$ se $x \in [-\sqrt{\pi}, 0[$, $f'(x) = -\operatorname{arcsen}(x)$ se $x > 0$. Usando il teorema sul limite della derivata si osserva che f è derivabile anche in $x = 0$ e si ha $f'(0) = 0$.

$f''(x) = \frac{x \cos(x^2)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$ se $x \in [-\sqrt{\pi}, 0[$, $f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se $x > 0$. Usando il teorema sul limite della derivata si osserva che f è derivabile due volte anche in $x = 0$ e si ha $f''(0) = -1$.

(iii) Si scriva il polinomio di Taylor-McLaurin di f di ordine 2.

$P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2$

(iv) Si calcoli $f(1)$.

$$f(1) = -\int_0^1 \operatorname{arcsen}(t)\, dt = -\left(\Big[t \operatorname{arcsen}(t) \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \right) = 1 - \frac{\pi}{2}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : [0, +\infty[\to 1\!\!R$ definita da $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

(i) Si disegni il grafico della funzione f.

La funzione è una cubica che passa per i punti $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$.

(ii) Si determinino gli approssimanti lineari f_0 e f_1 di f nei punti $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{3}{2}$.

$f_0(x) = 2x$; $f_1(x) = -\frac{1}{4}x$.

(iii) Si stabilisca se la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in [0, \frac{3}{2}[\\ f(x) & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

è convessa su $[0, +\infty[$.

La funzione g è lineare su $[0, \frac{3}{2}]$, quindi è convessa su $[0, \frac{3}{2}]$. Si ha $f''(x) = 6x - 6$, quindi la funzione f (e quindi g) è convessa su $[1, +\infty[$. La funzione g è derivabile anche in $x = \frac{3}{2}$ e la retta $y = f_1(x)$ è tangente il grafico di g nel punto $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$; si conclude allora che la funzione g è convessa su $[0, +\infty[$.

(iv) Al variare del parametro $m \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle intersezioni del grafico di f con la retta di equazione $y = mx$. (Si ricorda che stiamo supponendo $x \geq 0$).

La situazione è chiara se si disegnano sul grafico di f le tangenti $y = 2x$ e $y = -\frac{1}{4}x$. In alternativa si possono studiare le soluzioni dell'equazione parametrica $x^2 - 3x + (2 - m) = 0$; il discriminante si annulla per $m = -\frac{1}{4}$ e le soluzioni sono entrambe positive se $-\frac{1}{4} < m < 2$. In conclusione si ha:

se $m < -\frac{1}{4}$, esiste un'unica intersezione ($x = 0$);

se $m = -\frac{1}{4}$ le intersezioni sono due ($x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$);

se $-\frac{1}{4} < m < 2$ ci sono tre intersezioni;

se $m \geq 2$ si hanno due intersezioni (una è $x = 0$, l'altra per x grande esiste certamente perché la funzione è infinita a $+\infty$ di ordine 3 e quindi supera la retta).