Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Scipio Cuccagna ◯ Prof. Franco Obersnel ◯
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

(*i*) Si scriva lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin (cioè di centro $x_0 = 0$) della funzione $f(x) = \log(1+x)$.

(*ii*) Si scriva lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin (cioè di centro $x_0 = 0$) della funzione

$$g(x) = \int_0^x \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\log(1+\frac{s}{3})}{s}\, ds \right) dt.$$

• Si determini il raggio di convergenza della serie.

• Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(*iii*) Si stabilisca se $x = 0$ è un punto di massimo o minimo relativo o un punto di flesso (ascendente o discendente) per la funzione g.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la curva chiusa $\gamma : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,0)^T & t \in [-2,-1[, \\ \big(\cos(-\pi t), \operatorname{sen}(-\pi t)\big)^T & t \in [-1,0[, \\ (t+1,0)^T & t \in [0,1[, \\ \big(2\cos(\pi t - \pi), 2\operatorname{sen}(\pi t - \pi)\big)^T & t \in [1,2[, \end{cases}$$

e si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2\big(1,1\big)^T.$$

(i) Si disegni il sostegno di γ.

(ii) Si calcoli la circuitazione $\displaystyle\int_\gamma \langle g, \tau\rangle \, ds$.

(iii) Si calcoli il flusso $\displaystyle\int_\gamma \langle g, n\rangle \, ds$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(CP) \quad \begin{cases} y'' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}y' - \dfrac{a}{x^2+x+1}y; \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

(i) Si calcoli la soluzione di (CP) nel caso $a = 0$.

(ii) Si determini $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che la soluzione di (CP) sia una funzione polinomiale di grado 1 (cioè $y(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$).

(iii) Si determini l'insieme dei valori $a \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione di (CP) è convessa in un intorno di $x = 0$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \int_{x^3-3x}^{y^2} e^{t^2}\, dt.$$

(*i*) Si determinino

- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- i punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

- l'approssimante quadratico (polinomio di Taylor di grado 2) di f in $(0,0)^T$:

- $\sup f$:

- $\inf f$:

(*ii*) Sia $L_0 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ l'insieme di livello 0 della funzione f. Si trovino i punti di L_0 in cui localmente L_0 non è il grafico di una funzione $x = g(y)$ di classe C^1.