Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si consideri la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \big(\log(n+1)-\log(n)\big)$

• Si stabilisca se la converge assolutamente.

La successione $(\log(n+1)-\log(n) = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ è infinitesima di ordine 1, quindi la serie non converge assolutamente.

• Si stabilisca se la serie converge.

La serie soddisfa le ipotesi del teorema di Leibniz, quindi converge (semplicemente).

(ii) Si consideri la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ (\text{arctg}\ (n+1)-\text{arctg}\ (n))$

• Si stabilisca se la converge assolutamente.

La successione arctg $(n+1)-$ arctg (n) è infinitesima di ordine 2, come si osserva ad esempio calcolando il limite (utilizzando il teorema di De L'Hôspital)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{arctg}\ (x+1)-\text{arctg}\ (x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(2x+1)}{2(1+(x+1)^2)(1+x^2)} = 1$$

• Si stabilisca se la serie converge.

Sì, in quanto converge assolutamente.

ESERCIZIO N. 2. Si considerino l'insieme $\Omega = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi], 0 \le y \le \operatorname{sen}^3(x)\}$ e il campo vettoriale $g(x,y) = \big(xy + \operatorname{sen}(x), x + \frac{x^2}{2} + \cos(y)\big)^T$.

(i) Si calcolino il rotore e la divergenza di g.

$rot\, g = \Big(0,0,1\Big)$, $div\, g = y + \cos x - \operatorname{sen} y$.

(ii) Si calcoli l'area di Ω.

$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen}^3(x)\, dx = \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\Big(1 - \cos^2(x)\Big)\, dx = \frac{4}{3}$$

(iii) Si calcoli l'integrale di linea (lavoro) $\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds$ del campo g lungo la curva γ che ha per sostegno l'intervallo $[0,\pi] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.

$\gamma(t) = (t,0)^T$, $\gamma'(t) = (1,0)^T$;

$$\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds = \int_0^\pi \langle \big(\operatorname{sen}(t), t + \frac{t^2}{2} + 1\big), \big(1,0\big)^T\rangle\, dt = 2$$

(iv) Si calcoli l'integrale di linea (lavoro) $\int_\varphi \langle g, \tau\rangle\, ds$ del campo g lungo la curva $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \Big(t, \operatorname{sen}^3(t)\Big)^T$.

Osserviamo che il bordo $\partial\Omega$ di Ω è la concatenazione dei sostegni delle curve γ e $-\varphi$. Possiamo quindi usare la formula di Gauss-Green e ottenere

$$\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds - \int_\varphi \langle g, \tau\rangle\, ds = \int_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau\rangle\, ds = \iint_\Omega \langle div\, g, (0,0,1)^T\rangle\, dxdy = \iint_\Omega 1\, dxdy = \frac{4}{3}$$

e quindi

$$\int_\varphi \langle g, \tau\rangle\, ds = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = x\,\log x + y\,\log y$.

(i) Si determini il dominio naturale D di f.

$]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

(ii) Si provi che $f(x,y) < 0$ sull'insieme $E = \{(x,y)^T \in D : x+y = 1\}$.

Si ha $y > 0$, perciò sull'insieme E si ha $1 - x = y > 0$ e quindi $x < 1$. Analogamente $x > 0$, $1 - y = x > 0$ e $y < 1$. Quindi sull'insieme E si ha $\log y < 0$, $\log x < 0$, $x > 0$, $y > 0$ e pertanto $f(x,y) < 0$.

(iii) Si calcolino $\sup_E f$ e $\inf_E f$, specificando se esistono il massimo e/o il minimo di f su E.

Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x, 1-x) = \lim_{x\to 1^-} \Big(x\,\log x + (1-x)\,\log(1-x) \Big) = 0,$$

quindi $\sup_E f = 0$ e non c'è massimo.
Invece esiste minimo. Si calcola $\frac{d}{dx} f(x,1-x) = \log x + 1 - \log(1-x) - 1 = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$; la derivata si annulla se $\frac{x}{1-x} = 1$, cioè $x = \frac{1}{2}$. Si ha $\min_E f = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\log 2$.
In alternativa si può usare il teorema del moltiplicatore di Lagrange. Si risolve il sistema

$$\begin{cases} \log(x) + 1 = \lambda \\ \log(y) + 1 = \lambda \\ x + y = 1, \end{cases}$$

da cui si ottiene facilmente $x = y = \frac{1}{2}$ e quindi $\min_E f = -\log 2$.

(iv) Si stabilisca, motivando la risposta, se la curva $L_0 = \{(x,y)^T \in D : f(x,y) = 0\}$ è localmente esprimibile in ogni punto come grafico di una funzione derivabile nella variabile x.

Per applicare il teorema della funzione implicita in un punto $(x,y)^T$ si deve assumere $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Questo si può sempre fare a meno che non si abbia $\log y + 1 = 0$, cioè $y = e^{-1}$. Quindi un punto che crea difficoltà sarà del tipo $(x, e^{-1})^T$ tale che $x\,\log x - e^{-1} = 0$. La funzione $h(x) = x \log x$ è negativa su $]0,1[$ e strettamente crescente su $[1,+\infty[$, inoltre $h(1) = 0$ e $h(e) = e$; perciò esiste uno ed un solo $x_0 \in]0,+\infty[$ (infatti sarà $x_0 \in]1,e[$) tale che $h(x_0) = e^{-1}$. Se nel punto $(x_0, e^{-1})^T$ la curva L_0 fosse esprimibile come grafico di una funzione φ, questa dovrebbe avere derivata infinita e quindi φ non potrebbe essere derivabile. (In realtà si può verificare che non esiste alcuna funzione nella variabile x il cui grafico sia localmente la curva L_0; questo fatto si può verificare studiando la funzione implicita rispetto alla y e verificando, calcolando la derivata seconda, che il punto corrispondente è un punto di massimo per tale funzione.)

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il sistema lineare omogeneo

$$(S)\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

(i) Si determini lo spazio delle soluzioni del sistema (S).

Calcoliamo

$$x'' = 2x' + y' = 2x' + x + 2y = 2x' + x + 2(x' - 2x) = 4x' - 3x$$

e risolviamo l'equazione $x'' - 4x' + 3x = 0$, con soluzioni $x(t) = ae^t + be^{3t}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
$y = x' - 2x = ae^t + 3be^{3t} - 2(ae^t + be^{3t}) = -ae^t + be^{3t}$.

(ii) Si determini la soluzione $(x, y)^T$ di (S) che verifica le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Imponiamo le condizioni $1 = x(0) = a + b$, $0 = y(0) = -a + b$, da cui $a = b = \frac{1}{2}$. La soluzione è quindi

$$(x, y)^T = \Big(\frac{1}{2}(e^t + e^{3t}), \frac{1}{2}(-e^t + e^{3t})\Big)^T$$

(iii) Si stabilisca se esistono e, in caso positivo, si calcolino, le soluzioni di (S) che verificano le condizioni $x(0) = y(0)$, $x(1) = y(1)$.

Imponiamo le condizioni

$$x(0) = y(0) \to a + b = -a + b \to a = 0;$$

$$x(1) = y(1) \to ae + be^3 = -ae + be^3 \to a = 0$$

pertanto vi sono infinite soluzioni, del tipo $(x(t), y(t))^T = b\big(e^{3t}, e^{3t}\big)$; $b \in \mathbb{R}$