

Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione “autunnale”, appello unico

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di funzioni $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $y = 1 - \frac{1}{x}$. Imponendo $|y| < 1$ si ottiene $E =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

(ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la convergenza della serie su E è uniforme.

No, come ben noto dalle proprietà delle serie geometriche. La cosa si vede facilmente anche direttamente considerando ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n = 1, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Si calcoli la somma della serie.

$$f(x) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x.$$

(iv) Si usi la funzione f' per calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Grazie alla derivabilità a termine a termine della serie all'interno dell'intervallo di convergenza si ottiene

$$1 = f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$1 = f'(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right);$$

da cui $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Si poteva anche partire dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2}$, e calcolare in $y = \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2$.

(i) Si determinino:

- il gradiente e la matrice Hessiana di f :

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4(x - y), 4y^3 + 4(x - y))^T$$

$$H(f(x, y)) = 4 \begin{vmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{vmatrix}$$

- si determinino gli eventuali punti critici di f e la loro natura:

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})^T$ punti di minimo.

$(0, 0)^T$ è punto critico ma lo studio della matrice non fornisce informazioni utili. D'altra parte la funzione f ristretta alla bisettrice $y = x$ ha in $(0, 0)^T$ un punto di minimo, la funzione f ristretta alla bisettrice $y = -x$ ha in $(0, 0)^T$ un punto di massimo, pertanto $(0, 0)^T$ è un punto di sella.

(ii) Si consideri l'insieme di livello 0 della funzione f : $Z(f) = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$.

- Si stabilisca, motivando la risposta, se in ogni punto la curva $Z(f)$ è localmente parametrizzabile come grafico di una funzione.

Per applicare il teorema di parametrizzabilità locale devo evitare i punti dove il gradiente si annulla. Poiché i tre punti critici ottenuti in (i) non appartengono a $Z(f)$, si conclude che $Z(f)$ è localmente parametrizzabile come grafico di una funzione in ogni punto.

- Si stabilisca, motivando la risposta, se l'insieme $Z(f)$ è connesso (per archi).

L'insieme $Z(f)$ non è connesso. Infatti, si verifica immediatamente che l'insieme $Z(f)$ ha intersezione vuota con l'asse x (ponendo $y = 0$ si ottiene l'equazione $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$, che non ha soluzioni reali). D'altra parte, si possono trovare punti in $Z(f)$ con ordinata positiva e con ordinata negativa. Una curva continua che collega questi due punti dovrebbe attraversare l'asse delle x .

Per trovare i due punti si può ad esempio studiare l'intersezione di $Z(f)$ con la bisettrice $y = -x$; si ottiene l'equazione $2x^4 - 8x^2 + 2 = 0$; questa equazione ha 4 soluzioni reali distinte, due con ascissa negativa, due con ascissa positiva, che corrispondono a punti di $Z(f)$ con ordinate di segno opposto.

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il baricentro del solido omogeneo E definito da

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

RISULTATO

$$\text{Volume} = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{Baricentro} = \left(0, 0, \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)^T$$

SVOLGIMENTO

Integriamo per sezioni rispetto all'asse z . L'intersezione delle due superfici si trova a quota $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La sezione è una corona circolare di raggio interno $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ e raggio esterno $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2}$. Pertanto il volume si calcola come

$$V = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi ((1 - z^2) - z^2) dz = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}.$$

Sia $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T$ il baricentro cercato. Per ragioni di simmetria si ha $\hat{x} = \hat{y} = 0$. Inoltre

$$\hat{z} = \frac{1}{V} \iiint_E z dx dy dz = \frac{1}{V} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi z ((1 - z^2) - z^2) dz = \frac{3\sqrt{2}}{16}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri l'equazione

$$(E) \quad y' = (x-1)(y^2 - y - 2)$$

(i) Si determinino gli equilibri (soluzioni costanti) dell'equazione (E).

Si ha $y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2)$. Gli equilibri sono le funzioni costanti $y = -1$ e $y = 2$.

(ii) Sia φ la soluzione di (E) che verifica la condizione iniziale $\varphi(0) = 1$.

• È vero che φ ha nel punto $x = 1$ un punto di massimo?

Si ha $\varphi'(1) = 0$ e $\varphi''(1) = -2$, quindi il punto $x = 1$ è punto di massimo. Si osservi che, se $x > 1$, la soluzione è decrescente e, se $x < 1$, la soluzione è crescente. Quindi il punto è di massimo assoluto.

• È vero che $\varphi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

No. Poiché la funzione verifica $-1 < \varphi(x) < 2$ per ogni x (per Cauchy non può attraversare gli equilibri) ed è decrescente per $x > 1$, deve avere un limite $\ell \geq -1$ e deve essere $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$. Se fosse $\ell \geq 0$ si avrebbe la contraddizione $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(\ell^2 - \ell - 2) = -\infty$.

(iii) Si calcoli φ .

L'equazione è a variabili separate. Si osservi che

$$\frac{1}{(y+1)(y-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1} \right).$$

Si calcola

$$\int_0^x \frac{y'}{(y+1)(y-2)} dt = \int_0^x (t-1) dt = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$\int_1^{\varphi(x)} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$\log \left| \frac{\varphi(x) - 2}{\varphi(x) + 1} \frac{1+1}{1-2} \right| = \frac{3}{2}x^2 - 3x$$

Si ottiene

$$\varphi(x) = \frac{4 - \exp(\frac{3}{2}x^2 - 3x)}{2 + \exp(\frac{3}{2}x^2 - 3x)}$$