

Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel

Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere delle seguenti serie numeriche, specificando se l'eventuale convergenza è assoluta o semplice.

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \log(1+n^2)$$

Il termine generale è infinitesimo di ordine $> \frac{3}{2}$, la convergenza è assoluta.

$$(ii) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \log(1+n)$$

Il termine generale è infinitesimo di ordine < 1 , la convergenza non è assoluta. Tuttavia la serie verifica le ipotesi del teorema di Leibniz; infatti la successione $\left(\frac{1}{n} \log(1+n)\right)_n$ è infinitesima e a termini positivi, inoltre è definitivamente decrescente perché la funzione $h(x) = \frac{1}{x} \log(1+x)$ ha derivata

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \log(1+x) \right) = \frac{1}{x^2(1+x)} (x(1 - \log(1+x)) - \log(1+x)) < 0 \text{ se } x > 2.$$

Pertanto la serie è semplicemente convergente.

$$(iii) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log(n^2)}$$

La serie non converge in quanto il termine generale non è infinitesimo. Infatti

$$\log\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log(n^2)} = \frac{-\log(n)}{2\log(n)} = -\frac{1}{2} \text{ per ogni } n.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 y + y^2.$$

(i) Si calcolino il gradiente e la matrice Hessiana di f e si determinino eventuali punti critici.

$$\nabla f(x) = (2xy, x^2 + 2y)^T \quad H(f)(x, y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}.$$

L'unico punto critico è l'origine $(0, 0)^T$, ma la matrice Hessiana non ci da alcuna informazione.

(ii) Si provi che la funzione f

• non ha punti di massimo relativo:

L'unico candidato è il punto $(0, 0)^T$, dove $f(0, 0) = 0$. Sulla retta $x = 0$ la funzione $f(0, y) = y^2$ assume in $(0, 0)^T$ un punto di minimo stretto, pertanto $(0, 0)^T$ non può essere di massimo.

• non ha punti di sella stretti (cioè punti di sella per i quali la funzione ristretta alle due direzioni ha massimo e minimo stretti)

In $\mathbb{R}^2$ un punto di sella di una funzione differenziabile è critico, pertanto l'unico candidato è il punto $(0, 0)^T$. Si è già visto che sulla retta $x = 0$ la funzione $f(0, y) = y^2$ assume in $(0, 0)^T$ un punto di minimo stretto. Se $(0, 0)^T$ fosse un punto di sella, $x = 0$ dovrebbe essere un punto di massimo per qualche restrizione di f a rette del tipo $y = mx$. Ora, $f(x, mx) = mx^3 + m^2 x^2$, $f''(0) = 2m^2 > 0$ per ogni $m \neq 0$, quindi $(0, 0)^T$ è un punto di minimo per ogni direzione con $m \neq 0$. Se $m = 0$, cioè sull'asse $y = 0$, la funzione è costante $f(x, 0) = 0$. In questo caso il punto $x = 0$ è (banalmente) anche un punto di massimo, ma non stretto.

• non ha punti di minimo relativo (sugg. può essere utile considerare la curva $\gamma(t) = (t, -\frac{1}{2}t^2)^T$):

L'unico candidato è il punto $(0, 0)^T$. La restrizione della funzione sulla curva γ è $f(t, -\frac{1}{2}t^2) = -\frac{1}{4}t^4 < 0 = f(0, 0)$ per ogni $t \neq 0$, pertanto in ogni intorno di $(0, 0)^T$ vi sono punti in cui la funzione assume valori minori di $f(0, 0)$. Di conseguenza il punto $(0, 0)^T$ non può essere di minimo locale.

(iii) Si calcolino il minimo e il massimo assoluti di f ristretta alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Primo modo: moltiplicatori di Lagrange. Impostiamo il sistema

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 2x \\ x^2 + 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad \text{se } x = 0 \text{ si ha } |y| = 1, \text{ altrimenti } x \neq 0 \text{ e } \lambda = y, \text{ quindi } \begin{cases} x^2 = 2y^2 - 2y \\ (2y^2 - 2y) + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione $3y^2 - 2y - 1 = 0$ e otteniamo i valori $y = 1$, $y = -\frac{1}{3}$.

Abbiamo pertanto ottenuto i punti candidati $(0, \pm 1)^T$ e $(\pm \frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{1}{3})^T$ e quindi il massimo della funzione è $f(0, \pm 1) = 1$, il minimo è $f(\pm \frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$.

Secondo metodo: parametrizzazione del vincolo. Poniamo $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$,

$$h(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) \sin(t) + \sin^2(t) = \sin(t) - \sin^3(t) + \sin^2(t)$$

$$h'(t) = \cos(t)(1 - 3\sin^2(t) + 2\sin(t)) = 0 \text{ se } t = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{oppure} \quad s = \sin(t), 3s^3 - 2s - 1 = 0,$$

e si ottiene la stessa equazione considerata sopra.

Terzo modo: sostituendo nell'espressione della funzione $x^2 = 1 - y^2$, per $|y| \leq 1$. Si ottiene la funzione $g(y) = (1 - y^2)y + y^2 = -y^3 + y^2 + y$, che si studia facilmente. Si ha $g'(y) = -3y^2 + 2y + 1 = 0$, la stessa equazione vista sopra.

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il solido $E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

(i) Si calcoli il volume di E .

Integriamo per corde sull'insieme $B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, poi in polari:

$$Vol(E) = \iint_B (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho - \rho^3 d\rho \right) d\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

(ii) Si calcoli il baricentro di E .

Per motivi di simmetria si ha $\hat{x} = \hat{y} = 0$. Calcoliamo $\hat{z} = \frac{1}{Vol E} \iiint_E z dx dy dz$:

$$\iint_B \left(\int_{x^2+y^2}^1 z dz \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_B (1 - (x^2 + y^2)^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho - \rho^5 d\rho \right) d\vartheta = \frac{\pi}{3},$$

pertanto il baricentro è $(0, 0, \frac{2}{3})^T$.

(iii) Si calcoli il flusso uscente dal solido E del campo $g(x, y, z) = (xz, yz, xy)^T$.

Si ha $div g = 2z$, quindi il flusso cercato si può calcolare utilizzando l'integrale, già calcolato sopra,

$$\iint_{\partial E} \langle g, \nu \rangle d\sigma = \iiint_E div(g) dx dy dz = 2 \iiint_E z dx dy dz = \frac{2\pi}{3}.$$

ESERCIZIO N. 4. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_a) \quad \begin{cases} u' = x \operatorname{tg}(u) \\ u(0) = a \end{cases}$$

(i) Se possibile, si determini la soluzione del problema con $a = \frac{\pi}{4}$, specificando l’intervallo di definizione.

Si tratta di un’equazione a variabili separate; si ha $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1 \neq 0$, pertanto si può calcolare

$$\int_0^x \frac{\cos u(t)}{\operatorname{sen}(u(t))} u'(t) dt = \frac{1}{2} x^2 \quad \implies \quad \log \left| \frac{\operatorname{sen}(u(x))}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})} \right| = \frac{1}{2} x^2$$

$$\operatorname{sen}(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{1}{2} x^2\right) \quad \implies \quad u(x) = \arcsen \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{1}{2} x^2\right) \right),$$

con la restrizione $\exp(\frac{1}{2} x^2) \leq \sqrt{2}$, cioè $x^2 \leq 2 \log(\sqrt{2}) = \log(2)$,

$$x \in] -\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}[.$$

La funzione u potrebbe sembrare definita anche negli estremi dell’intervallo. Tuttavia, in questi punti il problema non è ben posto, perché vengono assunti valori infiniti.

(ii) Se possibile, si determini la soluzione del problema con $a = \frac{\pi}{2}$, specificando l’intervallo di definizione.

Non è possibile, perché la funzione $\operatorname{tg}(u)$ non è definita per $u = \frac{\pi}{2}$.

(iii) Se possibile, si determini la soluzione del problema con $a = \pi$, specificando l’intervallo di definizione.

La soluzione è la costante $u(x) = \pi$, definita su $\mathbb{R}$.