**Esame di Analisi matematica II**
**Prova di esercizi**

**Corso del prof. Franco Obersnel**
**Sessione estiva, I appello**

| | |
|---|---|
| **COGNOME e NOME** ________________________ | **N. Matricola** __________ |
| **Anno di Corso** ______ **Laurea in Ingegneria** ________________________ | |

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\big(x^2 - x - 1\big)^n$.

($i$) Si determini l'insieme di convergenza $E$ della serie.

Si ponga $y = x^2 - x - 1$; la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n$ converge su $[-1, 1[$ e quindi la serie assegnata converge su $E = ]-1, 0] \cup [1, 2[$.

($ii$) Si provi che la serie converge uniformemente sull'intervallo $]-\frac{1}{2}, 0[$

Si ha $x^2 - x - 1 < 0$ su $]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ e quindi anche su $]-\frac{1}{2}, 0[$ . La successione $(\frac{|x^2-x-1|^n}{n})_n$ è chiaramente decrescente e infinitesima. Su questo intervallo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \big|x^2 - x - 1\big|^n$ verifica pertanto le ipotesi del Teorema di Leibniz. Utilizzando la stima dell'errore si ottiene

$$|S(x) - S_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{n}|x^2 - x - 1|^n < \frac{1}{n}$$

e quindi la convergenza è uniforme.

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

($i$) Si determinino:

• il gradiente e la matrice Hessiana di $f$:

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2x, 2y, -2z\big)^T$$

$$H(f)(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

• eventuali punti critici di $f$ e la loro natura:

$(0,0,0)^T$ punto di sella.

($ii$) Si stabilisca se esistono e, in caso affermativo, si determinino il massimo e il minimo della funzione $f$ ristretta alla superficie (paraboloide) $P = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

La funzione ristretta alla superificie $P$ si può scrivere come $h : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $h(z) = z - z^2$. Pertanto $\inf = -\infty$, $\max = \frac{1}{4}$.

($iii$) Si determini la retta ortogonale alla superficie di livello $L_1 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\}$ nel punto $(1,1,1)^T$.

Il gradiente della funzione nel punto è ortogonale alla superficie di livello. Pertanto, una parametrizzazione della retta cercata è $\gamma(t) = (1+t, 1+t, 1-t)^T$.

**COGNOME e NOME** ____________________

**ESERCIZIO N. 3.** Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x,y,z) = \nabla f(x,y,z), \qquad \text{con} \qquad f(x,y,z) = x^2 + xy^3 + yz,$$

e la semisfera di equazione $S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0\}$.

$(i)$ Si calcolino divergenza e rotore di $g$.

Per definizione il campo è conservativo, quindi il suo rotore è nullo.
La divergenza è il campo $div\, g(x,y,z) = div\,(2x + y^3, 3xy^2 + z, y)^T = 2 + 6xy$.

$(ii)$ Si calcoli l'integrale di linea della componente tangenziale di $g$ ("lavoro") $\int_{\partial S^+} \langle g, \tau \rangle \, ds$ sul bordo della semisfera $S$.

L'integrale di linea sulla curva chiusa $\partial S^+$ è nullo perché il campo è conservativo.

$(iii)$ Si calcoli il flusso del campo $g$ uscente dalla semipalla $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z \geq 0\}$.

Si usa il teorema della divergenza. Si ha

$$\iiint_K (2 + 6xy)\, dxdydz = \iiint_K 2\, dxdydz + \iiint_K 6xy\, dxdydz = \frac{4}{3}\pi + 0$$

(Il primo integrale è due volte il volume della semisfera, il secondo integrale è nullo per ragioni di simmetria).

**ESERCIZIO N. 4.** Al variare della condizione iniziale $y(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$(CP)_\alpha \qquad \begin{cases} y' = (y - y^2)\cos(x) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

($i$) Si provi che per $0 < \alpha < 1$ le soluzioni di $(CP)_\alpha$ sono tutte definite e limitate su $\mathbb{R}$.

Poiché le costanti $y = 0$ e $y = 1$ sono equilibri dell'equazione, tutte le soluzioni $y$ con $\alpha \in ]0, 1[$ sono tali che $0 < y < 1$ (non possono toccare gli equilibri per il teorema di unicità). Inoltre la derivata è limitata dall'equazione e quindi sono globalmente definite.

($ii$) Si calcoli la soluzione del problema $(CP)_\alpha$ per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Si tratta di un'equazione a variabili separate, pertanto

$$\operatorname{sen} x = \int_0^x \frac{y'}{y(1-y)}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \log\left|\frac{y(x)}{1-y(x)} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right|$$

$$y(x) = \big(1 - y(x)\big)\, e^{\operatorname{sen}(x)} \Longrightarrow y(x) = \frac{e^{\operatorname{sen}(x)}}{1 + e^{\operatorname{sen}(x)}}$$

($iii$) Si stabilisca se è vero che tutte le soluzioni di $(CP)_\alpha$ definite su $\mathbb{R}$ sono periodiche.

Rivedendo il calcolo in ($ii$) con un generico punto iniziale $\alpha \neq 0, 1$ (soluzioni costanti sono comunque periodiche), si vede che ogni soluzione non costante è in ogni caso sempre funzione di $\operatorname{sen}(x)$ e pertanto è periodica.