Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\ e^{nx}}.$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(ii) Si determini l'insieme in cui la serie converge assolutamente.

(iii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la serie converge uniformemente sul suo insieme di convergenza.

(iv) Si calcoli la somma della serie. (Suggerimento: si ponga $y = e^{-\frac{1}{2}x}$)

ESERCIZIO N. 2.

Si considerino i campi scalari $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme E definiti da

$$g_1(x, y) = 3x^2 + y^3, \quad g_2(x, y) = 1 + 2x^2 + y^3 - y^2 \quad \text{e} \quad E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) \le g_2(x, y)\}.$$

Si considerino inoltre le superfici S_1 e S_2, grafici delle funzioni g_1 e g_2 ristrette ad E, rispettivamente. Siano Γ la curva intersezione delle due superfici, $\Gamma = S_1 \cap S_2$, e S la superficie chiusa unione delle due superfici $S = S_1 \cup S_2$.

(i) Si determini l'insieme E.

(ii) Si determini una parametrizzazione di Γ.

(iii) Si calcoli la massima quota raggiunta dai punti di Γ (cioè $\max\{z : (x, y, z)^T \in \Gamma\}$).

(iv) Si consideri il campo vettoriale $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $h(x, y, z) = \big(x + y^2, 3x + y^2, 3z - 2yz\big)^T$. Si calcoli il flusso di h uscente dalla superficie S: $\displaystyle\iint_S \langle h, n\rangle \, d\sigma$.

COGNOME e NOME ______________________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \quad u'' = \sqrt{1-(u')^2}.$$

(i) Si verifichi che ogni soluzione u di (E) definita su $\mathbb{R}$ ha al più un punto di minimo e non può avere punti di massimo.

(ii) Si determinino tutte le soluzioni u di (E) il cui grafico è una retta (cioè si determinino i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $u(x) = ax + b$ è una soluzione di (E)).

(iii) Si determini una soluzione **definita su** $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$(CPL) \begin{cases} u'' = \sqrt{1-(u')^2}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. Un'impresa produce una quantità di beni Q in funzione delle unità di capitale K e delle unità di lavoro L impiegate. La produzione può essere descritta dalla funzione

$$Q = Q(K, L) = 15\ K^{1/3}L^{2/3}.$$

Il capitale ha un costo di 3 euro per unità, il lavoro ha un costo di 6 euro per unità. Si calcoli la massima produzione possibile se l'impresa ha un vincolo di spesa di 450 euro (quindi $3K + 6L \leq 450$).

RISULTATO

SVOLGIMENTO