Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione autunnale, appello unico

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si considerino le serie numeriche

$$A: \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{2^n+n!}; \qquad B: \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!+1}{n!+2^n}.$$

(*i*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie A converge.

La serie è a termini positivi e si ha

$$\frac{2^n+1}{2^n+n!} \leq \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{n!}.$$

Le due serie di termini generali $\frac{2^n}{n!}$ e $\frac{1}{n!}$ sono convergenti (per il criterio dell'ordine di infinitesimo o per il criterio del rapporto, o riconoscendo la serie esponenziale). Pertanto, per il criterio del confronto, si conclude che la serie A converge.

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie B converge.

La serie B non converge perché la successione dei termini generali non è infinitesima (tende a 1) per $n \to +\infty$.

(*iii*) In caso di risposta affermativa a uno dei punti (*i*) o (*ii*), detta s la somma della serie, si verifichi che $3 < s < 12$.

La serie A è a termini positivi, quindi, in particolare, la somma dei primi 4 termini è inferiore alla somma della serie. Si ha pertanto

$$3 < 2 + \frac{62}{42} = \frac{2}{1+1} + \frac{2+1}{2+1} + \frac{4+1}{4+2} + \frac{8+1}{8+6} < s.$$

Inoltre, dalla disuguaglianza

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{2^n+n!} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^2 + e,$$

dove si è riconosciuta la serie di Taylor della funzione esponenziale, si ottiene $s < e^2 + e$. Osservato che $e < 3$ si conclude $s < 12$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz.$$

(*i*) Si calcolino

• il gradiente di f:

$$\nabla f = \left(2x - 2z, 4y^3 + 2y, 3z^2 - 2x\right)^T$$

• la matrice Hessiana di f:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2 + 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

• i punti critici di f: $(0,0,0)^T$ e $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)^T$.

• la natura dei punti critici di f:

$(0,0,0)^T$ è punto di sella perché la matrice Hessiana nel punto è indefinita (la forma quadratica associata è $\varphi(x,y,z) = 2x^2 - 4xz + 2y^2$ e si nota, ad esempio, che $\varphi(0,1,0) > 0$ e $\varphi(1,0,1) < 0$). $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)^T$ è punto di minimo perché la matrice Hessiana nel punto è definita positiva come si verifica ad esempio con il metodo di Sylvester-Jacobi.

• gli estremi inferiore e superiore di f:

$\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$; si può ad esempio considerare la restrizione della funzione f alla retta $x = 1, y = 0$: $f(1,0,z) = 1 + z^3 - 2z$ e considerare i limiti per $z \to \pm\infty$.

(*ii*) Sia $L_0 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$ l'insieme di livello 0 della funzione f. Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie L_0 nel punto $(1,0,1)^T$.

Il gradiente di f nel punto è ortogonale al piano tangente. Si ha $\nabla f(1,0,1) = (0,0,1)^T$. Pertanto il piano tangente è il piano di equazione $z = 1$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. La posizione $x(t)$ di un oggetto di massa $M > 0$ lanciato con velocità iniziale $v_0 \in \mathbb{R}$ su una rotaia con attrito segue la legge

$$\begin{cases} Mx'' = -x'^2 \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

(i) Si calcoli la soluzione $x(t)$ in dipendenza dai parametri M e v_0.
Detta $v(t) = x'(t)$ si ha $v(t) = \frac{v_0 M}{M + v_0 t}$, pertanto

$$x(t) = M \log(1 + \frac{v_0}{M} t).$$

(ii) Siano x_1 e x_2 le soluzioni del problema precedente con, rispettivamente, $M = 2, v_0 = 1$ e $M = 1, v_0 = 2$. Si calcoli il tempo $t > 0$ in cui $x_1(t) = x_2(t)$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri nel piano xy l'arco di cicloide definito da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t\big)^T.$$

(i) Si calcoli l'integrale di linea

$$\int_\gamma \sqrt{y}\, ds.$$

(ii) Si calcoli l'area della regione piana compresa tra l'asse x e l'arco di cicloide γ.