

Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $x \in [0, +\infty[$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)$.

(i) Si determini l’insieme $A \subseteq [0, +\infty[$ per i quali la serie è assolutamente convergente.

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{x+n}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)$$

Il valore assoluto del termine generale è infinitesimo di ordine $1/2$ per ogni x , pertanto $A = \emptyset$.

(ii) Si determini l’insieme $B \subseteq [0, +\infty[$ per i quali la serie è convergente.

Scriviamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{x+n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{x+n}.$$

Entrambe le serie soddisfano le ipotesi del criterio di Leibniz (per la seconda serie, si osservi che le successioni $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ e $\left(\frac{1}{x+n}\right)_n$ sono entrambe positive, decrescenti e infinitesime, quindi lo è anche il loro prodotto). La serie converge pertanto per il criterio di Leibniz e si ha $B = [0, +\infty[$.

In alternativa si può anche osservare che la seconda serie converge addirittura assolutamente (e uniformemente, si veda il punto successivo), per il test di Weierstrass.

(iii) Si stabilisca se la serie è uniformemente convergente sull’insieme B .

Consideriamo la serie $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{x+n}$. Per la stima dell’errore di Leibniz si ha

$$|S(x) - S_{n-1}(x)| < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

pertanto la convergenza è uniforme.

In alternativa si può anche applicare il test di Weierstrass, osservando che

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{x+n} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(i) Si determinino:

- il gradiente e la matrice Hessiana di f :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)^T$$

$$H(f)(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

- eventuali punti critici di f , la loro natura e si calcoli il valore di f in tali punti:

$(0, 0)^T$ punto di sella, $f(0, 0) = 0$;

$(1, 1)^T$ punto di minimo, $f(1, 1) = -1$.

(ii) Si consideri l’insieme di livello $L_0 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$.

- Si determinino i punti di L_0 in un intorno dei quali la curva L_0 è esprimibile localmente come grafico di una funzione derivabile $y = \varphi(x)$. Avendo presente le ipotesi del Teorema della funzione implicita, dobbiamo cercare eventuali punti di L_0 dove si annulla la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y^2 - x = 0; \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases}$$

Nei punti $(0, 0)^T$ e $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})^T$ la derivata si annulla e quindi in tali punti non è possibile esprimibile localmente L_0 come grafico di una funzione derivabile $y = \varphi(x)$.

(iii) Si consideri l’insieme di livello $L_{-1} = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 3xy = -1\}$.

- Si provi che L_{-1} non è connesso. (Sugg.: può essere utile determinare le intersezioni della curva con gli assi).

La curva L_{-1} interseca l’asse delle x soltanto nel punto $(-1, 0)^T$ e l’asse delle y soltanto nel punto $(0, -1)^T$. Il punto $(1, 1)^T$ appartiene alla curva. Una curva continua che connette i punti $(1, 1)^T$ e $(-1, 0)^T$, deve necessariamente intersecare l’asse delle y , e l’unico punto in cui lo può fare è il punto $(0, -1)^T$; tuttavia, per raggiungere tale punto dovrebbe attraversare l’asse delle x in un valore positivo, e questo è impossibile.

In alternativa si può osservare che il punto $(1, 1)^T$ è un punto di minimo locale stretto. Pertanto esiste un intorno forato di $(1, 1)^T$ dove la funzione è strettamente maggiore di -1 . Questo significa che il punto è isolato in L_{-1} . Poiché l’insieme L_{-1} non si riduce a un punto (i punti $(-1, 0)^T$ e $(0, -1)^T$ appartengono a L_{-1}), si conclude che L_{-1} non è connesso.

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si considerino il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da $g(x, y) = (x^2y - y, xy^2 + x)^T$ e il disco di equazione $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

(i) Si calcolino divergenza e rotore di g .

$$\operatorname{div}(g)(x, y) = 4xy; \quad \operatorname{rot}(g)(x, y) = (0, 0, y^2 - x^2 + 2)^T$$

(ii) Si calcoli l’integrale di linea $\oint_{\partial D^+} \langle g, \tau \rangle ds$, dove ∂D^+ è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 2x$, percorsa in verso positivo.

Usando la formula di Gauss-Green e integrando in coordinate polari $x = 1 + \rho \cos(\vartheta); y = \rho \sin(\vartheta)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} \langle g, \tau \rangle ds &= \iint_D (y^2 - x^2 + 2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho^3 \sin^2(\vartheta) - \rho^3 \cos^2(\vartheta) - 2\rho^2 \cos(\vartheta) + \rho) d\rho \right) d\vartheta \\ &= \pi \end{aligned}$$

(iii) Si calcoli il flusso del campo g : $\oint_{\partial D^+} \langle g, \nu \rangle ds$, uscente dal disco D .

Usando il teorema della divergenza si ha

$$\oint_{\partial D^+} \langle g, \nu \rangle ds = \iint_D 4xy dx dy = 0$$

(il fatto che l’integrale sia nullo è immediato perché la funzione è dispari rispetto alla variabile y e il dominio è simmetrico nella variabile y rispetto all’origine).

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli la soluzione $u = u(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - u = e^{-|x|}; \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

RISULTATO

$$u(x) = \frac{1}{2} \operatorname{senh}(|x|) - \frac{1}{2} |x| e^{-|x|}$$

SVOLGIMENTO

Le soluzioni dell’equazione omogenea associata sono combinazioni lineari delle funzioni $u_1(x) = e^x$ e $u_2(x) = e^{-x}$.

Studiamo il problema per $x \leq 0$. Per il metodo si somiglianza cerchiamo una soluzione particolare del tipo axe^x . Calcolando le derivate e sostituendo nell’equazione si ottiene $u_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$. Le soluzioni del problema per $x \leq 0$ sono pertanto le funzioni del tipo $\lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$u(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x = -\frac{1}{2}\operatorname{senh}(x) + \frac{1}{2}xe^x$$

Studiamo ora il problema per $x \geq 0$. Per il metodo si somiglianza cerchiamo una soluzione particolare del tipo axe^{-x} . Calcolando le derivate e sostituendo nell’equazione si ottiene $u_p(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x}$. Le soluzioni del problema per $x \geq 0$ sono pertanto le funzioni del tipo $\lambda e^x + \mu e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$u(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x) - \frac{1}{2}xe^{-x}.$$