Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^k}$$

(i) Per ogni n e k si calcoli il massimo su $\mathbb{R}$ della funzione $\frac{2x}{x^2+n^k}$

(ii) Si stabilisca per quali k la serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$.

(iii) Si stabilisca per quali k la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da

$$f(x,y) = x^3 - x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y.$$

(i) Si calcolino gradiente e matrice Hessiana di f.

(ii) Si determinino eventuali punti critici di f e si studi il carattere di tali punti.

(iii) Si consideri la curva di livello $L_0 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$. Si provi che L_0 è in ogni punto il sostegno di una curva localmente parametrizzabile. Si stabilisca se esistono e quanti sono (senza necessariamente calcolarli) eventuali punti in cui L_0 non è localmente grafico di una funzione derivabile del tipo $y = \varphi(x)$ ed eventuali punti dove L_0 non è localmente grafico di una funzione derivabile del tipo $x = \psi(y)$.

(iv) Si provi che l'insieme $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, f(x,y) \leq 0\}$ è compatto e si calcolino il massimo e il minimo di f su E.

COGNOME e NOME ____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la curva piana chiusa definita parametricamente da $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\operatorname{sen}(t)\cos(t),\, \operatorname{sen}^2(t)\big)^T$.

(i) Si calcoli la lunghezza della curva.

(ii) Si calcoli l'area della regione racchiusa dalla curva.

ESERCIZIO N. 4. Al variare del parametro $\lambda \in \{-4, -1, 0, 1, 4\}$ si consideri l'equazione lineare

$$(E_\lambda) \quad y'' + \lambda y = 0.$$

(i) Al variare di λ si determinino tutte le soluzioni di E_λ.

(ii) Si determinino i parametri λ per i quali il problema (P_λ) ammette soluzioni non nulle che soddisfano le condizioni di periodicità

$$y(0) = y(\pi); \qquad y'(0) = y'(\pi).$$