Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere delle seguenti serie numeriche

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\log(1+2^{-n})}{\text{arctg }(2^{-n})}$

La serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo, essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+2^{-n})}{\text{arctg }(2^{-n})} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\text{arctg }(x)} = 1$$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\text{arctg }(2^{n})}{\log(1+2^{n})}$

La serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. È facile verificare che il termine generale è positivo e infinitesimo. Per verificare che è decrescente poniamo $f(x) = \frac{\text{arctg }(x)}{\log(1+x)}$. Allora si ha

$$f'(x) = \frac{1}{(\log(1+x))^2(1+x)} \cdot \Big(\frac{(1+x)\log(1+x)}{1+x^2} - \text{arctg }(x)\Big)$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(1+x)\log(1+x)}{1+x^2} - \text{arctg }(x)\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

Pertanto la funzione f è definitivamente decrescente e quindi anche la successione $\left(\frac{\text{arctg }(2^n)}{\log(1+2^n)}\right)_n$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 - y).$$

(i) Si provi che $\lim_{\|(x,y)^T\| \to +\infty} f(x, y) = 0$ e si verifichi che, di conseguenza, la funzione ammette massimo e minimo.

Si ha $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t} = 0$. Pertanto

$$|e^{-x^2-y^2}(x^2 - y)| \le e^{-y^2}x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}|y|e^{-y^2} \le x^2e^{-x^2} + |y|e^{-y^2} \to 0$$

Proviamo ora che la funzione ammette massimo e minimo. Utilizzeremo il teorema di Weierstrass ma non direttamente, perché il dominio $\mathbb{R}^2$ non è compatto. Consideriamo ad esempio $\varepsilon = \frac{f(0,-1)}{2} = -\frac{f(0,1)}{2} = \frac{e^{-1}}{2}$ e prendiamo $R > 0$ tale che, per ogni $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, se $\|(x, y)^T\| > R$ si ha $|f(x, y)| < \varepsilon$. La funzione (continua) ristretta al disco compatto $B((0, 0)^T, R)$ ha massimo $M = f(x_1, y_1) \ge f(0, -1) > \varepsilon$, e minimo $m = f(x_2, y_2) \le f(0, 1) < -\varepsilon$; poiché fuori dal disco la fuinzione verifica $|f(x, y)| < \varepsilon$ si conclude che $M = \max_{\mathbb{R}^2} f$ e $m = \min_{\mathbb{R}^2} f$.

(ii) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x) = e^{-x^2-y^2}\big(2x(y - x^2 + 1), -2y(x^2 - y) - 1\big)^T$$

(iii) Si determinino i punti critici di f.

$$P_1 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T, \quad P_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T, \quad P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})^T, \quad P_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})^T.$$

(iv) Si calcolino il minimo e il massimo assoluti di f (potrebbe essere utile ricordare che $\log 2 \simeq 0,69$).

Poiché sappiamo che esistono il massimo e il minimo, i punti di massimo e minimo devono essere tra i punti critici trovati in (iii). Calcoliamo i valori:

$$f(P_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}; \quad f(P_2) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}; \quad f(P_3) = f(P_4) = e^{-\frac{3}{4}}.$$

Chiaramente si ha $\min f = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$ (unico valore negativo). Per determinare qual è il massimo occorre confrontare i valori $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$ e $e^{-\frac{3}{4}}$. Osserviamo che

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} < e^{-\frac{3}{4}} \iff e^{\frac{1}{4}} < \sqrt{2} \iff \frac{1}{2} < \log(2),$$

quindi $\max f = e^{-\frac{3}{4}}$.

(v) Si scriva l'equazione parametrica della retta ortogonale al grafico della funzione f nel punto $(0, 0, 0)^T$.

$$\gamma(t) = (0, t, t)^T$$

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la superficie $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\vartheta, t) = \big(t\ \cos(\vartheta), t\,\mathrm{sen}\,(\vartheta), t^2\big)^T$$

(i) Si calcoli l'area della superficie σ.

Si calcola il vettore normale

$$\nu(s,t) = \big(-2t^2\cos(\vartheta), -2t^2\sin(\vartheta), t\big)^T$$

e quindi

$$Area = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4t^4 + t^2}\, dt \right) d\vartheta = \frac{2\pi}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4t^2+1}\ 8t\, dt = \frac{\pi}{6}\big(2\sqrt{2} - 1\big).$$

(ii) Si calcoli il volume della regione compresa tra la superficie σ e il piano $z = \frac{1}{4}$.

Si noti che $z \in [0, \frac{1}{4}]$ e le sezioni rispetto l'asse z sono dischi di raggio $\sqrt{z}$. Perciò, integrando per sezioni, si ha

$$Volume = \int_0^{\frac{1}{4}} \pi z\, dz = \frac{\pi}{32}.$$

In alternativa si può integrare per corde, osservando che i punti della regione soddisfano la relazione $x^2+y^2 \leq z$. Sia $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$; allora si ha

$$Volume = \int_D \Big(\frac{1}{4} - (x^2+y^2)\Big)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} \big(\frac{1}{4} - \rho^2\big)\rho\, d\rho\Big)\, d\vartheta = \frac{\pi}{32}.$$

ESERCIZIO N. 4. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_{y_0}) \qquad \begin{cases} y' = y\,x - y^2\,x, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si indichi con $\phi_{y_0} : I_{y_0} \to \mathbb{R}$ la soluzione di (CP_{y_0}) (I_{y_0} è l'intervallo più grande possibile dove è definita la soluzione ϕ_{y_0}).

(i) Si determinino gli equilibri dell'equazione (cioè le soluzioni costanti).

$y = 0$ e $y = 1$.

(ii) Si determinino i parametri $y_0 \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione ϕ_{y_0} ammette in $x = 0$ un punto di minimo.

Si ha

$$y'' = (1-2y)(y-y^2)x^2 + (y-y^2)$$

e quindi $\phi''_{y_0}(0) = y_0 - y_0^2$. Pertanto 0 è punto di minimo se e solo se $y_0 \in [0,1]$.

Si può anche evitare il calcolo della derivata seconda, studiando il segno della derivata prima a destra e a sinistra di $x = 0$.

(iii) Si provi che, se $y_0 > 0$, ogni soluzione ϕ_{y_0} è globale (cioè è definita su tutto $\mathbb{R}$) e limitata.

Se $y_0 > 1$ la funzione è decrescente su $[0, +\infty[$ e crescente su $]-\infty, 0]$, pertanto si ha $1 \leq \phi_{y_0}(x) \leq y_0$. Se $0 < y_0 < 1$ la funzione è limitata dagli equilibri 0 e 1. In particolare è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(iv) Si calcoli la soluzione ϕ_2.

$$\int_0^x \frac{y'}{y(1-y)}\,dt = \int_0^x t\,dt \Longrightarrow \log\left(\frac{y(x)}{2(y(x)-1)}\right) = \frac{1}{2}x^2 \Longrightarrow y(x) = \frac{2\exp(\frac{1}{2}x^2)}{2\exp(\frac{1}{2}x^2) - 1}$$