Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ____________________	**N. Matricola** ________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si scriva la serie di Taylor-MacLaurin (di centro 0) della funzione $f(x) = \cos(x^8)$

Poiché

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

si ha

$$\cos(x^8) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{16n}}{(2n)!}$$

(ii) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos(x^8)\,dx$ esprimendo il risultato come serie numerica.

Usando il teorema di integrazione delle serie si ha

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^8)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_{-1}^{1} x^{16n}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{(16n+1)\,(2n)!}$$

(iii) Si calcoli un valore approssimato dell'integrale in (ii) con una tolleranza di errore inferiore a 10^{-4}, giustificando le proprie affermazioni.

Poiché la serie ottenuta in (ii) è a termini di segno alterno, per la formula d'errore di Leibniz si ha la stima

$$|S - S_{n-1}| \leq \frac{2}{(16n+1)\,(2n)!},$$

dove S indica la somma della serie e S_n è la ridotta $n-$esima. Si cerca n tale che $20000 < (2n)!\,(16n+1)$. Se $n = 3$ si ha $6! \cdot 49 \simeq 700 \cdot \frac{1}{2}100 = 35000 > 20000$, pertanto un valore approssimato accettabile è

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^8)\,dx \simeq 2 - \frac{1}{17} + \frac{1}{12 \cdot 33}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x^2 - y)(2y - 2x^2 - 1)$$

sull'insieme $K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le \frac{1}{2}(x^2 + 1)\}$.

(*i*) Si descriva K con un semplice disegno.

È la zona compresa tra due parabole. Si osservi che $|x| \le 1$.

(*ii*) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = \Big(2x(2y-2x^2-1)+(x^2-y)(-4x), -(2y-2x^2-1)+(x^2-y)\,2\Big)^T = \Big(-2x(4x^2-4y+1), 4x^2-4y+1\Big)^T$$

(*iii*) Si determinino i punti critici di f.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x(4x^2 - 4y + 1) = 0; \\ 4x^2 - 4y + 1 = 0; \end{cases}$$

si ottengono i punti che risolvono l'equazione $4x^2 - 4y + 1 = 0$, cioè i punti della parabola $y = x^2 + \frac{1}{4}$. I punti critici della funzione f sono pertanto i punti del tipo $(x, x^2 + \frac{1}{4})^T$ con $|x| \le 1$.

(*iv*) Si determinino il massimo e il minimo assoluti della funzione f su K.

All'interno di K abbiamo i punti critici trovati in (*ii*) che soddisfano $|x| < 1$; il valore di f in questi punti è $f(x, x^2 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$.
Studiamo il comportamento di f sul bordo di K.
Sulla parabola $y = x^2$ la funzione vale costantemente 0.
Sulla parabola $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ la funzione si può scrivere come

$$h(x) = f(x, \frac{1}{2}(x^2 + 1)) = -\frac{1}{2}x^2(x^2 - 1).$$

Questa funzione va studiata sull'intervallo $[-1, 1]$. I punti critici di h sono $x = 0$ (dove la funzione vale 0) e i punti $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dove la funzione vale $\frac{1}{8}$. Inoltre, negli estremi $x = -1$ e $x = 1$ la funzione vale 0.

Si conclude pertanto che $\min_K f = 0$ e $\max_K f = \frac{1}{8}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si verifichi che la funzione $F(y) = \frac{1}{2}\frac{e^{-y^2}}{y^2}$ è una primitiva della funzione $f(y) = -e^{-y^2}\left(\frac{y^2+1}{y^3}\right)$.

Si calcola la derivata di F:

$$F'(y) = \frac{1}{2}\frac{e^{-y^2}\cdot(-2y) - e^{-y^2}\cdot 2y}{y^4} = -e^{-y^2}\left(\frac{y^2+1}{y^3}\right).$$

(ii) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -e^{-y^2}\left(\frac{y^2+1}{y^3}\right) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali possiamo supporre $y(x) > 0$ e $y'(x) > 0$.

Moltiplicando per y' e integrando tra 0 e x si ottiene

$$\int_0^x y'y''\,dt = \int_0^x f(y)\,y'\,dt$$

e quindi

$$\frac{1}{2}y'(x)^2 - \frac{1}{2}y'(0)^2 = F(y(x)) - F(y(0)),$$

da cui

$$y'(x) = \sqrt{\frac{e^{-y(x)^2}}{y(x)^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}y(x)^2}}{y(x)}$$

cioè

$$y(x)\,e^{\frac{1}{2}y(x)^2}y'(x) = 1.$$

Integrando tra 0 e x si ottiene

$$\int_0^x y(t)\,e^{\frac{1}{2}y(t)^2}y'(t)\,dt = x,$$

cioè

$$e^{\frac{1}{2}y(x)^2} - e^{\frac{1}{2}} = x,$$

da cui, facilmente $y(x) = \sqrt{2\log(\sqrt{e}+x)}$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il solido E delimitato dal paraboloide di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$ e dal piano $z = 0$.

(i) Si calcoli il momento di inerzia di E rispetto all'origine $I_0 = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$.

L'insieme E è normale rispetto il piano xy e si può scrivere come

$$E = \{(x, y, z)^T : (x, y)^T \in B(0, 2), 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\},$$

dove $B(0, 2) = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$.
Pertanto, integrando per corde, si ottiene facilmente

$$I_0 = \iint_{B(0,2)} \Big(\int_0^{4-x^2-y^2} \big(x^2 + y^2 + z^2\big)\, dz \Big)\, dx\, dy = \iint_{B(0,2)} \Big((x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2) + \frac{1}{3}(4 - x^2 - y^2)^3 \Big)\, dx\, dy$$

Usando coordinate polari nell'integrale doppio si ha ancora

$$I_0 = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \big(\rho^2(4 - \rho^2) + \frac{1}{3}(4 - \rho^2)^3\big)\rho\, d\vartheta \Big)\, d\rho = 32\pi.$$

(ii) Si calcoli il flusso del campo $g(x, y, z) = \big(x^3, y^3, z^3\big)^T$ uscente da E: $\iint_{\partial E} \langle g, n\rangle\, d\sigma$.

Possiamo usare il teorema della divergenza di Gauss. La divergenza di g è $div(g) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, pertanto il flusso del campo è uguale a

$$\iiint_E 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dm = 3I_0 = 96\pi.$$