Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{2^n+3^n}$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

Si osserva che

$$\frac{e^{nx}}{2^n+3^n} = \left(\frac{e^x}{3}\right)^n \frac{1}{\frac{2}{3}^n+1},$$

e quindi $E =]-\infty, \log 3[$.

(ii) Si stabilisca se la serie converge uniformemente sull'insieme E.

No. Infatti la successione dei termini generali non è uniformemente infinitesima essendo, per ogni n,

$$\lim_{x\to\log(3)^-} \frac{e^{nx}}{2^n+3^n} = \frac{1}{\frac{2}{3}^n+1} \geq \frac{1}{2}$$

(iii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione f è derivabile sull'intervallo $]-1,0[$.

Sì. Infatti, si vede facilmente, usando ad esempio l'$M-$test di Weierstrass, che la serie delle derivate $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\frac{e^{nx}}{2^n+3^n}$ è uniformemente convergente sull'intervallo $]-1,0[$. Infatti si ha, per ogni n e ogni $x \in]-1,0[$, $\left|n\,\frac{e^{nx}}{2^n+3^n}\right| \leq \frac{n}{2^n+3^n}$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n+3^n}$ è convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^2$.

(i) Si determinino:

• il gradiente e la matrice Hessiana di f:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 2xy, -x^2 + 2y\right)^T \qquad H(f)(x,y) = \begin{vmatrix} 6x-2y & -2x \\ -2x & 2 \end{vmatrix}$$

• eventuali punti critici di f diversi da $(0,0)^T$ e la loro natura:

$(3, \frac{9}{2})^T$ punto di sella.

(ii) Si determinino minimo e massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \le y \le x + 1\}.$$

Non ci sono punti critici all'interno di E.

Sulla curva $y = x^2 + 1$ la funzione ristretta si può scrivere come $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + x^2 + 1$ che ha minimo 1 e massimo 3.

Sulla curva $y = x + 1$ la funzione ristretta si può scrivere come $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$ che ha minimo 1 e massimo 3.

Si conclude che $\min_E f = 1$ e $\max_E f = 3$.

(iii) Si verifichi che il punto critico $(0,0)^T$ non è né di estremo, né di sella.

Si osserva che la restrizione di f all'asse x è $f(x,0) = x^3$, pertanto in ogni intorno di $(0,0)^T$ vi sono punti in cui la funzione assume un valore minore e punti in cui la funzione assume un valore maggiore di $f(0,0) = 0$. Quindi il punto non è di estremo.

Per dimostrare che non è neppure un punto di sella, si consideri la restrizione della funzione f alla generica retta $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, $m \ne 0$. Questa funzione ha in $x = 0$ un punto di minimo; infatti è sufficiente studiare in 0 la funzione

$$h(x) = f(x, mx) = x^3(1-m) + m^2x^2; \quad h'(0) = 0; \quad h''(0) = 2m^2 > 0.$$

Lo stesso accade anche per la direzione dell'asse y, essendo in questo caso $f(0,y) = y^2$. Pertanto, non esiste alcuna direzione lungo la quale la restrizione della funzione f presenta un punto di massimo.

COGNOME e NOME ____

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse z

$$I_z = \iiint_B (x^2 + y^2)\,\delta(x, y, z)\,dxdydz$$

della palla $B = B(0, R) = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ $(R > 0)$ nei due casi

(*i*) $\delta(x, y, z) = 1$ (palla omogenea).

Integrando in coordinate sferiche $x = \text{sen}\,(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = \text{sen}\,(\varphi)\,\text{sen}\,(\vartheta)$, $z = \cos(\varphi)$, si ottiene

$$I_z = \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2\,\text{sen}^2(\varphi)\,\rho^2 \text{sen}\,(\varphi)\,d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{8\pi}{15} R^5$$

(*ii*) $\delta(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 < \frac{R^2}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } \frac{R^2}{4} \le x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$

Cambia soltanto la componente in ρ:

$$I_z = \frac{8\pi}{3} \left(\int_0^{\frac{R}{2}} \rho^5 d\rho + \int_{\frac{R}{2}}^R \rho^3 d\rho \right) = \frac{\pi R^4}{18} \left(R^2 + 90\right)$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri su $]0,+\infty[$ l'equazione differenziale ordinaria lineare

$$(E) \quad y' + \frac{3}{x}\,y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}.$$

(i) Si determini lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata a (E).

L'equazione $y' + \frac{3}{x}\,y = 0$ è a variabili separate; integrando si ottiene

$$y(x) = \lambda x^{-3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(ii) Si usi il metodo della variazione della costante per determinare una soluzione particolare di (E).

$$y_p(x) = x^{-3} \int_1^x t^3\, \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^3}\, dt = x^{-3}\left(\cos(1) - \cos(x)\right).$$

(iii) Si determini la soluzione y dell'equazione (E) che verifica la condizione iniziale $y(1) = 0$.

La soluzione è proprio la soluzione particolare y_p determinata in (ii).