

Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^3}{x^2 + n^2}$

(i) Si determini l'insieme di convergenza puntuale E della serie.

\mathbb{R} (ordine di infinitesimo 2).

(ii) Si stabilisca se la convergenza è uniforme su E .

No. Se la convergenza fosse uniforme, la successione dei termini generali dovrebbe essere uniformemente infinitesima. Quindi, fissato ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$, esisterebbe n_ε tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si avrebbe

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + n^2} \right| < \frac{1}{100}.$$

Prendendo ad esempio $x = n$ si ottiene una contraddizione.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se è vero o no che, sull'insieme di convergenza, si ha

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^3}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2 + n^2} \right).$$

La serie delle derivate ha termine generale

$$b_n(x) = x^2 \frac{x^2 + 3n^2}{(x^2 + n^2)^2}.$$

Su ogni insieme del tipo $[-M, M]$ la convergenza di questa serie è uniforme, per l' M -test di Weierstrass, essendo

$$|b_n(x)| \leq M^2 \frac{M^2 + 3n^2}{n^4},$$

quindi la risposta è positiva.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x, y) = y^2 - x^2y^2 - y^3$, definita sull’insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

(i) Si determinino:

- il gradiente

$$\nabla f(x) = (-2xy^2, 2y - 2x^2y - 3y^2)^T$$

e la matrice Hessiana di f :

$$H(f)(x, y) = \begin{vmatrix} -2y^2 & -4xy \\ -4xy & 2 - 2x^2 - 6y \end{vmatrix}.$$

- eventuali punti critici di f interni a E e la loro natura: C’è un unico punto critico interno, $(0, \frac{2}{3})^T$ che è un punto di massimo con valore $\frac{4}{27}$.

- i valori massimo e minimo assoluti della funzione f .

La funzione assume il valore costante 0 sull’intera frontiera dell’insieme E , pertanto si ha $\min f = 0$, $\max f = \frac{4}{27}$.

(ii) Si scriva l’equazione parametrica della retta ortogonale al grafico della funzione f nel punto $(0, 1, 0)^T$.

$$\gamma(t) = (0, 1 + t, t)^T$$

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume del solido

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq y^2 - x^2y^2 - y^3\}.$$

RISULTATO

$$\frac{64}{945}$$

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_{y_0}) \quad \begin{cases} y' = y \cos(x) - y^2 \cos(x), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(i) Si determinino gli equilibri dell’equazione in (CP_{y_0}) (cioè le soluzioni costanti).

Ci sono due equilibri: $y = 0$ e $y = 1$.

(ii) Si determinino i parametri $y_0 \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione del problema (CP_{y_0}) è convessa in un intorno di $x = 0$.

Calcolando la derivata seconda si ottiene

$$y''(0) = y_0(1 - y_0)(1 - 2y_0),$$

da cui si ottiene la convessità locale in 0 per $y_0 \in [0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$. Resta il dubbio per $y_0 = \frac{1}{2}$. In questo caso si può verificare che il punto $x = 0$ è di flesso discendente calcolando la derivata terza $y'''(0) = -\frac{1}{8}$.

(iii) Si stabilisca se esistono parametri $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione del problema (CP_{y_0}) è limitata ma non costante.

Per tutti i valori $y_0 \in]0, 1[$.

(iv) Si stabilisca se esistono parametri $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione del problema (CP_{y_0}) è illimitata.

Evidentemente ci aspettiamo di trovare un esempio per valori $y_0 > 1$ oppure $y_0 < 0$. Calcolando ad esempio la soluzione per $y_0 = 2$ si ottiene

$$y(x) = \frac{2e^{\operatorname{sen} x}}{2e^{\operatorname{sen} x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \arcsen(-\log(2))} y(x) = +\infty.$$