Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 28

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 a) Sia f una funzione infinita in x_0 di ordine di infinito α, cioè $Ord_{x_0} f = \alpha$. Si provi che $\frac{1}{f}$ è una funzione infinitesima in x_0 di ordine di infinitesimo α, cioè $ord_{x_0} \frac{1}{f} = \alpha$.

b) Sia f infinita di ordine α in x_0. Si provi che per ogni $\beta \in \mathbb{R}^+$ la funzione $|f(x)|^\beta$ è infinita di ordine $\alpha \cdot \beta$ in x_0.

c) Sia f infinita di ordine α in x_0, g infinita di ordine β in x_0. Si provi che la funzione $f(x) \cdot g(x)$ è infinita di ordine $\alpha + \beta$ in x_0.

Esercizio 2 Si stabilisca l'ordine di infinito o di infinitesimo delle seguenti funzioni nel punto indicato:
a) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}$; $x_0 = 0$, $x_0 = +\infty$.

b) $f(x) = x^2\sqrt{x+1} \cdot \operatorname{arctg}(x)$; $x_0 = 0$, $x_0 = +\infty$.

c) $f(x) = 1 - \cos(\frac{1}{x^2})$; $x_0 = +\infty$.

d) $f(x) = x - \operatorname{sen}(e^x - 1)$; $x_0 = 0$, $x_0 = +\infty$.

e) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$; $x_0 = +\infty$.

f) $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$; $x_0 = +\infty$, $x_0 = 0$.

g) $f(x) = \log(e^x + x^2)$; $x_0 = -\infty,\ x_0 = 0,\ x_0 = +\infty$.

Esercizio 3 Per le seguenti coppie di funzioni, si confronti l'ordine di infinitesimo/infinito in x_0:

a) $f(x) = x(1 - \cos x)$, $g(x) = x - \operatorname{sen} x$; $x_0 = 0$.

b) $f(x) = x \cdot \log^2(x^3)$, $g(x) = x \cdot \log^3(x^2)$; $x_0 = +\infty$, $x_0 = 0$.

c) $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$.

d) $f(x) = \cosh x - 1$, $g(x) = \operatorname{senh}(x)$, $x_0 = 0$, $x_0 = +\infty$.

Soluzioni
2) a) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, b) 3, $\frac{5}{2}$, c) 4, d) 2, 1, e) $\frac{1}{2}$, f) 1, non è né infinita né infinitesima in 0 !, g) sottoreale, 1, 1.
3) a) $ord_0 f = ord_0 g$. b) $Ord_{+\infty} f < Ord_{+\infty} g$, $ord_0 f > ord_0 g$. c) Sono infinitesimi non confrontabili. d) $ord_0 f > ord_0 g$, $Ord_{+\infty} f = Ord_{+\infty} g$.