Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 11: equazioni e sistemi di equazioni differenziali.

Esercizio 1.
La seguente equazione differenziale ordinaria non lineare è nota con il nome di equazione di van der Pol:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \varepsilon(1-y^2)\frac{dy}{dt} + ay = 0;$$

dove $\varepsilon > 0$ e $a > 0$.

Si scriva un sistema di 2 equazioni del primo ordine equivalenti a tale equazione. Si separi inoltre la parte lineare dalla parte non lineare, si scriva cioè l'equazione nella forma $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + g(\mathbf{y})$ dove A è una matrice 2×2 e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è il termine non lineare.

Svolgimento.
Poniamo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$. Il sistema proposto diventa

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & , \\ y_2' = \varepsilon(1-y_1^2)y_2 + ay_1 & . \end{cases}$$

Poniamo $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & \varepsilon \end{pmatrix}$ e $g(\mathbf{y}) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 y_2 \end{pmatrix}$. Potremo allora scrivere

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} - g(\mathbf{y}).$$

Esercizio 2. È dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(*) \qquad \begin{cases} y_1'(x) = y_1 y_2 \sqrt{|x|} & , \\ y_2'(x) = y_1 - |x-1|y_2 & . \end{cases}$$

Si stabilisca se esiste una soluzione del problema di Cauchy definito dal sistema (*) e dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_1(0) = a & ; \\ y_2(0) = b & . \end{cases}$$

Si trovi la soluzione nel caso in cui $a = b$.

Svolgimento.
La funzione $F(x, \mathbf{y}) = \left(y_1 y_2 \sqrt{|x|}, y_1 - |x-1|y_2\right)^T$ è continua e quindi la soluzione del problema di Cauchy esiste. Inoltre, le derivate parziali della funzione F rispetto alle due componenti dellla variabile vettoriale $\mathbf{y}$ esistono e sono continue. Questo fatto ci permette di dire che la soluzione è anche unica.

Nel caso in cui $a = b$ si vede facilmente che la soluzione costante $\mathbf{y}(x) = (a, a)^T$ è la soluzione del problema.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(1-x^2-y^2) & , \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(1-x^2-y^2) & . \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è l'unico punto critico del sistema. Si studino le traiettorie delle soluzioni nelle vicinanze del punto critico: si passi a coordinate polari e si trovi esplicitamente la soluzione del problema.

Svolgimento.

È evidente che l'origine è un punto critico del sistema. Verifichiamo che non esistono altri punti critici. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -y + x(1 - x^2 - y^2) = 0 & , \\ x + y(1 - x^2 - y^2) = 0 & . \end{cases}$$

Se $x = 0$, allora necessariamente $y = 0$, come si ottiene dalla prima equazione. Nello stesso modo se $y = 0$ si ottiene $x = 0$ dalla seconda equazione. Si può dunque supporre $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Moltiplicando le due equazioni rispettivamente per x e per y si trova

$$\begin{cases} -xy + x^2(1 - x^2 - y^2) = 0 & , \\ xy + y^2(1 - x^2 - y^2) = 0 & . \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene l'equazione $(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = 0$, dunque $(1 - x^2 - y^2) = 0$. Ma sostituendo tale valore nelle equazioni originarie si ottiene $y = 0$ e $x = 0$. Dunque è provato che l'origine è l'unico punto critico del sistema.

Passiamo a coordinate polari: poniamo $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\sin\vartheta$. Dall'uguaglianza $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\vartheta$ si ottiene

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2}.$$

Sostituendo le espressioni di x' e y' ottenute dal sistema, si ottiene

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1,$$

da cui segue $\vartheta(t) = t + \vartheta_0$.

In modo simile, ricordando che $\rho^2 = x^2 + y^2$ si ottiene

$$2\rho\frac{d\rho}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2\rho^2(1 - \rho^2).$$

Dall'ultima equazione si ottiene

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2).$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{d\rho}{\rho(1 - \rho^2)} = dt;$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\frac{1}{2}}{\rho - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \rho}\right) d\rho = dt.$$

Integrando, si ottiene

$$\log\left(\frac{\rho}{\sqrt{|\rho^2 - 1|}}\right) = t + c.$$

Cerchiamo di esplicitare la ρ :

$$\rho^2 = |\rho^2 - 1|k^2 e^{2t},$$

dove $k = e^c$.

Calcolando il valore $\rho(0) = \rho_0$ per $t = 0$ si ottiene la costante k in funzione di ρ_0:

$$k^2 = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2 - 1|}.$$

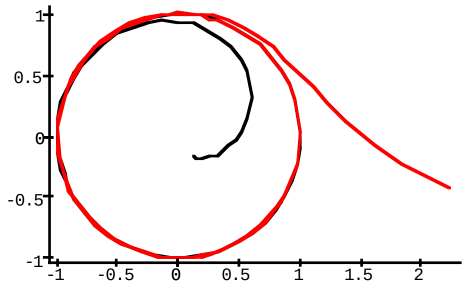
Dunque

$$\frac{\rho^2}{|\rho^2-1|} = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2-1|}e^{2t};$$

da cui

$$(\rho_0^2-1)\rho^2 e^{-2t} = \rho_0^2(\rho^2-1);$$
$$\rho^2(\rho_0^2+(1-\rho_0^2)e^{-2t}) = \rho_0^2;$$
$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2+(1-\rho_0^2)e^{-2t}}}.$$

La soluzione generale del nostro problema si può pertanto scrivere nella forma $x(t) = \rho(t)\cos(t+\vartheta_0)$ e $y(t) = \rho(t)\sin(t+\vartheta_0)$.



Quando $\rho_0 = 1$ l'orbita è il circolo di raggio unitario; altrimenti l'orbita gira intorno al circolo e tende al circolo per $t \to +\infty$, dall'interno se $0 < \rho_0 < 1$, dall'esterno se $\rho_0 > 1$.

Esercizio 4. (Modello predatore-preda di V.Volterra)
Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \quad , \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \quad , \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono costanti positive.

Il sistema proposto è un classico modello matematico per descrivere l'evoluzione della popolazione di due specie animali in un sistema chiuso. La variabile y indica il numero di individui di una specie di predatori; la quantità delle loro prede è indicata con la variabile x. Ad esempio si può pensare ad una popolazione di conigli (x) e di volpi (y).

In assenza di predatori, la popolazione di prede crescerebbe in modo esponenziale, e l'aumento sarebbe descritto dall'equazione

$$\frac{dx}{dt} = ax;$$

con $a > 0$.

In assenza di prede, la popolazione di predatori sarebbe condannata all'estinzione, e la variazione sarebbe descritta dall'equazione

$$\frac{dy}{dt} = -cx;$$

con $c > 0$.

In contemporanea presenza di prede e predatori, ad ogni incontro tra preda e predatore corrisponde un incremento nella popolazione dei predatori, e un decremento nella popolazione delle prede.

Si trovino i punti critici del sistema e se ne descriva il significato. Si studino le traiettorie delle soluzioni.

Svolgimento.

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 & , \\ -cy + dxy = 0 & ; \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i due punti $(0,0)^T$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})^T$.

Il punto $(0,0)^T$ è un punto di sella. La soluzione che passa per tale punto è la soluzione banale in cui non vi sono né prede, né predatori. È chiaro che si tratta di un equilibrio instabile; è sufficiente la presenza di poche prede (in assenza di predatori) per dare origine ad un aumento esponenziale di popolazione. D'altra parte le presenza di predatori (e nessuna preda) porterà presto alla loro estinzione.

È più interessante la situazione nel punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})^T$. Questa è la situazione in cui prede e predatori possono coesistere. Ci chiediamo se tale punto di equilibrio è stabile.

Per studiare le traiettorie delle soluzioni, nello spazio delle fasi, dividiamo la seconda equazione $\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$ per la prima $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$; otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Risolviamo tale equazione separando le variabili; si ottiene

$$\frac{c - dx}{x}\,dx + \frac{a - by}{y}\,dy = 0,$$

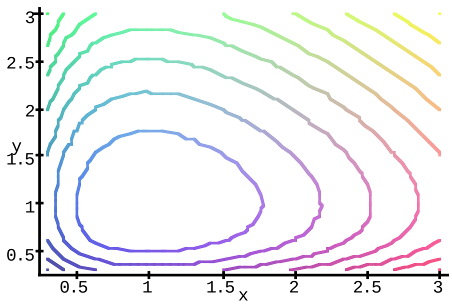
che, integrata, ci dà

$$c \log x - dx + a \log y - by = K,$$

dove K è una costante.

Dunque le traiettorie sono le linee di livello della funzione $g(x, y) = c \log x - dx + a \log y - by$.

La figura successiva mostra alcune di tali linee nel caso particolare $a = b = c = d = 1$:



Si può provare che anche nel caso generale, le traiettorie sono linee di questo tipo. Il punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})^T$ pertanto è un punto di equilibrio stabile.