I PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA I

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2000–2001. Trieste, 28 ottobre 2000

STUDENTE (Cognome e nome)____________________ **Matr. N.** ________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ________________ **Voto** ________

ESERCIZIO N. 1. In un bosco ci sono sei eucalipti. In quanti modi cinque scimmie possono disporsi su quegli eucalipti in modo che esattamente due alberi ospitino una sola di quelle scimmie?

RISULTATO

$$\binom{6}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 1200.$$

SVOLGIMENTO Esattamente due delle cinque scimmie stanno su un albero ciascuna, perciò le altre tre scimmie devono stare tutte sullo stesso albero. Ci sono $\binom{6}{2}$ modi per scegliere i due alberi con una sola scimmia. Ci sono $5 \cdot 4$ modi per scegliere le due scimmie "solitarie". Restano $6 - 2 = 4$ modi per scegliere l'albero con le tre scimmie. Perciò i diversi modi saranno

$$\binom{6}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 1200.$$

STUDENTE ______________________________ **Matr. N.** ______________

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = [0,1[\cup \left\{ \frac{1}{n+1} - 1 \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si determinino:

- $\operatorname{int} E =$

- $\operatorname{cl} E =$

- $\operatorname{fr} E =$

- $\inf E =$

- $\operatorname{cl} \mathcal{C}E =$

NB: $\operatorname{cl}E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int}E$ indica l'interno di E; $\operatorname{fr}E$ indica la frontiera di E; $\mathcal{C}E$ indica il complementare di E.

STUDENTE ______________________________ **Matr. N.** ______________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = \arcsin\left(1 - \log_\pi x\right).$$

(i) Si determinino:

• il dominio di f

$$x > 0\ ; \qquad |1 - \log_\pi x| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - \log_\pi x \leq 1;$$

$$-2 \leq -\log_\pi x \leq 0 \qquad 2 \geq \log_\pi x \geq 0$$

$$\pi^2 \geq x \geq 1$$

$$\mathrm{dom}(f) = [1, \pi^2].$$

• i punti di annullamento e i segni di f

$$\text{la funzione arcoseno è crescente, dunque} \arcsin(1 - \log_\pi x) \geq 0$$

$$\text{se e solo se}\ \ 1 - \log_\pi x \geq 0; \qquad 1 \geq \log_\pi x$$

$$f(x) > 0 \ \ \text{se}\ 1 \leq x < \pi$$

$$f(x) = 0 \ \ \text{se}\ x = \pi$$

$$f(x) < 0 \ \ \text{se}\ \pi < x \leq \pi^2.$$

(ii) Si provi che f è decrescente sul suo dominio.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_\pi x_1 < \log_\pi x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_\pi x_1 > -\log_\pi x_2 \Rightarrow 1 - \log_\pi x_1 > 1 - \log_\pi x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin(1 - \log_\pi x_1) > \arcsin 1 - \log_\pi x_2).$$

STUDENTE ______________________________ **Matr. N.** ____________

ESERCIZIO N. 4. Si determinino i numeri $z \in \mathbb{C}$ che verificano il sistema

$$\begin{cases} z^8 = 1 \\ \frac{z+\bar{z}}{2} \geq 0, \end{cases}$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

RISULTATO

$$i, \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}, -i$$

SVOLGIMENTO In coordinate polari $z = [\rho, \vartheta]$

$$[\rho, \vartheta]^8 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1, \quad \vartheta = \frac{0 + 2k\pi}{8}; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Di queste radici, quelle che soddisfano la $\frac{z+\bar{z}}{2} \geq 0$, cioè $\Re(z) \geq 0$ sono quelle che si ottengono per

$$k = 0, 1, 2, 6, 7.$$

STUDENTE ______________________________ **Matr. N.** ______________

ESERCIZIO N. 5. Si dimostri, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n - \sin n}{n^2 - 1} = 0.$$