**Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.**

**Esercizi sulle serie numeriche e sulle successioni e serie di funzioni**

*Dott. Franco Obersnel*

**Esercizio 1** Rispondere alle seguenti questioni:

a) Siano

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

e

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$$

due serie convergenti. Cosa si può dire della serie somma

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots ?$$

E se una delle due serie diverge e l'altra converge?

b) Supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R}.$$

Cosa possiamo dire di

$$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n \ ?$$

c) Supponiamo che

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

sia una serie a termini positivi e che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R}.$$

Cosa possiamo dire di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} \ ?$$

d) Supponiamo che

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

sia una serie a termini positivi e che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} = s \in \mathbb{R}.$$

Cosa possiamo dire di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ ?$$

e) Si provi che il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

è uguale al carattere della serie

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

(Sol. a) converge alla somma della serie, diverge, b) $= s - a_0 - a_1 - a_2$, c) converge a $s' \leq s$, d) nulla, e) le ridotte delle due serie differiscono per una costante)

**Esercizio 2** Si usi l'integrale generalizzato per provare

a) che la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ \log(n)\ \log(\log n)}$ diverge;

b) che la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\,(\log(n))^2}$ converge ad una somma $s$ con $s < \frac{1}{\log 2}$.

(Sol. a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \log x \log(\log x)}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \log(\log(\log b)) - \log(\log(\log 3)) = +\infty$, b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx = \frac{1}{\log 2}$)

**Esercizio 3** Si calcoli la somma della serie

$$\frac{11}{100} + \frac{101}{100^2} + \frac{1001}{100^3} + \frac{10001}{100^4} + \dots.$$

(Sol. È la serie somma di due serie geometriche convergenti di termine generale $(1/10)^n + (1/100)^n$; la somma è $1/9 + 1/99$)

**Esercizio 4** Si provi che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

di termine generale

$$a_n = \frac{3}{1 + \cos n + 2^n}$$

è convergente ad un numero reale $s$ e che

$$\frac{3}{2} \leq s \leq 3.$$

(Suggerimento: $-1 \leq \cos n \leq 1$; inoltre se $n \geq 1$ si ha $2^n + 2 \leq 2^{n+1}$)

(Sol. confronto con serie geometriche $3/2\ (1/2)^n \leq a_n \leq 3\ (1/2)^n$)

**Esercizio 5**

a) Si determinino i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1+3x)^n$$

risulta essere convergente, e se ne calcoli la somma.

b) Si determinino i valori di $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin^{2n} \alpha$$

risulta essere convergente, e se ne calcoli la somma.

(Sol. a) $-(1/(3x))$ per $-(2/3) < x < 0$, b) $1/(1-2\sin^2(\alpha))$ per $0 < \alpha < \pi/4$)

**Esercizio 6**

a) Si provi che se una serie è semplicemente convergente (non assolutamente convergente), allora esistono necessariamente infiniti termini di segno negativo e infiniti termini di segno positivo della serie.

b) Si provi che se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine soprareale. (Si pensi alla serie geometrica, che tipo di infinitesimo è il termine generale di una serie geometrica? Con cosa si maggiora una serie per la quale vale il criterio del rapporto?)

(Sol. a) Si veda l'Esercizio 1 e), b) Se $a_{n+1} \leq k a_n$ per ogni $n$, si ha $a_n \leq a_0 k^n$ per ogni $n$)

**Esercizio 7** Si studi il carattere delle serie seguenti:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n}$ con $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}$

e) $1 - a + \frac{1}{2} - a^2 + \frac{1}{3} - a^3 + \ldots$ con $0 < a < 1$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$

(Sol. a) converge (ord. inf.), b) converge per $\alpha > 1$ (rapporto o ord. inf.), c) diverge ($a_n > 2e^{-3}n$ per $n \geq 3$), d) converge (radice), e) diverge (somma di una serie armonica e di una serie geometrica convergente), f) converge (rapporto o si osservi che $a_n = \frac{1}{2^n}$)

**Esercizio 8** Si consideri la seguente serie (di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \; ;$$

a) si provi che $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$;
b) si scrivano le ridotte $s_1$, $s_2$, $s_3$ e si calcoli la ridotta n-esima $s_n$;
c) si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$;
d) si scrivano le somme di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e di $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(Sol. b) $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, c) 1, d) 1 e $\frac{1}{3}$)

**Esercizio 9** Si studi il carattere delle seguenti serie, distinguendo se è il caso tra convergenza semplice e convergenza assoluta:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)\cos(\frac{\pi}{n})}{n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{na}{n^2 + a^2}$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n+1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!\, n^{-\frac{n}{2}} \operatorname{arctg}(n)$.

(Sol. a) converge semplicemente, b) converge semplicemente per ogni $a \neq 0$, assolutamente per $a = 0$, c) converge semplicemente, d) converge semplicemente, e) diverge)

**Esercizio 10** Si studi il carattere delle seguenti serie di numeri complessi:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\log(\tfrac{4}{3})} + i\sqrt{\log(\tfrac{3}{2})}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n}\left(\cos\tfrac{1}{n} + i \sin\tfrac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + i\, n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n + i}{3^n - ni}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4+3i)^n}{5^n+n^2 i}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+i^{2n}\cdot\sqrt{n+1}}{n}$

(Sol. a) converge assolutamente b) non converge, c) converge assolutamente, d) converge assolutamente, e) non converge, f) converge semplicemente)

**Esercizio 11** Rispondere alle seguenti questioni:

a) Si verifichi che se la funzione $f$ è limite uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora $f$ è pure limite puntuale della successione.

b) Si provi che la successione di funzioni $(f_n)_n$ dove $f_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ è definita da $f_n(x) = x^n$ non ammette limite uniforme per $n \to +\infty$.

**Esercizio 12**

a) Si calcoli il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_n$ dove $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

b) Detto $f(x)$ tale limite si verifichi che $f_n$ non converge uniformemente a $f$ per $n \to +\infty$. (Fissato $\epsilon > 0$, per esempio si prenda $0 < \epsilon < e-2$, deve essere $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per ogni $n \geq N_\epsilon$ e per ogni $x$. In particolare si può prendere $x = n$ e si giunge ad una contraddizione).

**Esercizio 13** Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n}.$$

a) Si verifichi che la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

b) Si verifichi che la serie delle derivate non converge su $\mathbb{R}$.

**Esercizio 14** Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}.$$

a) Si verifichi che per la serie assegnata non è possibile applicare il test di Weierstrass.

b) Si verifichi che la serie converge uniformemente.

**Esercizio 15** Si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}.$$

a) Si verifichi che la serie converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[\varepsilon, +\infty[$, con $\varepsilon > 0$.

b) Si verifichi che $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile.

**Esercizio 16** Supponiamo di sapere che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+1)^n$ converge semplicemente (non assolutamente) nel punto $x=-3$. Può la serie convergere nel punto $x=2$ ?

**Esercizio 17** Si calcoli il raggio di convergenza e si studi il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza delle serie seguenti:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$. d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-4)^n$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\ 2^n} x^n$. f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{e^n}(x-e)^n$.

g) (Si calcoli solo il raggio di convergenza) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ con $k \in \mathbb{N}^+$.

(Sol. a) $E = ]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, b) $E = ]-1, 1[$, c) $E = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, d) $E = ]2, 6[$, e) $E = ]-2, 2]$, f) $E = ]0, 2e[$, g) $\rho = k^k$.)

**Esercizio 18**

a) Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2-n)\ x^n$.

b) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ usando il teorema di integrazione.

c) Si calcoli la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1}\ x^n$.

d) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

e) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ distinguendo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$.

(Sol. a) $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$, b) $\dfrac{1}{2x}\log(\dfrac{1+x}{1-x})$ per $|x| < 1$, $x \neq 0$, 1 se $x = 0$, c) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{\log(1-x)}{x}$ per $|x| < 1$, 2 se $x = 0$ d) $\dfrac{1}{x}\mathrm{arctg}\ x$ per $|x| < 1$, $x \neq 0$, 1 se $x = 0$, e) se $x < 0$ si ha $x = -(\sqrt{-x})^2$ e posso usare l'esercizio d):

$\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\text{arctg}\,\sqrt{-x}$ per $x > -1$; 1 se $x = 0$; se $x > 0$ si ha $x = (\sqrt{x})^2$ e posso usare l'esercizio b): $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$ per $x < 1$.)

**Esercizio 19** Si dimostri il seguente criterio di sviluppabilità. Sia $h > 0$, e sia $I = ]x_0 - h, x_0 + h[ \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una costante $M > 0$ tale che $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\dfrac{n!}{h^n}$ per ogni $n$ e per ogni $x \in I$. Allora la funzione $f$ è sviluppabile in serie di Taylor in $x_0$.

**Esercizio 20** Si rappresenti in serie di Taylor di centro 0 la funzione $e^x - \dfrac{1}{1-x}$ e se ne calcoli il raggio di convergenza.

(Sol. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-n!}{n!}x^n$, $\rho = 1$.)

**Esercizio 21** Si verifichi che $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$ e $\sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$.

(Sol. Si usi la formula di Eulero.)

**Esercizio 22** Si calcoli una primitiva della funzione

$$f(x) = e^{(x^k)}$$

dove $k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 1$, rappresentandola in serie.

(Sol. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{nk+1}}{n!(nk+1)}$.)

**Esercizio 23** Mediante lo sviluppo in serie della funzione

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

si calcolino nel punto $x = 0$ le derivate di ogni ordine $f^{(n)}(0)$.

(Sol. Confrontando i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione e della sua serie di Taylor si ottiene $f^{(2n)}(0) = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.)

**Esercizio 24** Calcolare (esprimendo il risultato in serie numerica)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\text{arctg}(t^2)}{t^2}\,dt.$$

(Sol. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)2^{4n+1}}$.)

**Esercizio 25** Si risolva l'equazione $\dfrac{1+x}{1-x} = 3$. Si usi tale soluzione per rappresentare il numero $\log 3$ come serie di potenze.

(Sol. $y = \frac{1}{2}$; $\log(1+\frac{1}{2}) - \log(1-\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1/2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}$.)