Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: funzioni olomorfe e serie di potenze

Dott. Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\, \Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\, \Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Si verifichi che la funzione $f(z) = |z|^2$ è derivabile in $z = 0$ ma non è olomorfa in $z = 0$.

Esercizio 2 a) Si studi la derivabilità della funzione $f(z) = \Im m\, z + i \Re e\, z$.

b) Si studi la derivabilità della funzione $f(z) = \Im m\, z - i \Re e\, z$.

c) Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfa in un aperto connesso A. Si verifichi che la funzione $g(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ è olomorfa in A se e soltanto se f è costante.

Esercizio 3
a) Si risolva in $\mathbb{C}$ l'equazione $e^{2z-1} = 1$.
b) Si verifichi che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ha $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$. Per quali z è vero che $\operatorname{sen}(i\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(iz)}$?
c) Si risolva in $\mathbb{C}$ l'equazione $\cos z = 2$.
d) Si risolva in $\mathbb{C}$ l'equazione $\operatorname{senh} z = i$.

Esercizio 4 Sia $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ olomorfa nella palla $B(0, R)$. Definiamo $g : B(\infty, R) \to \mathbb{C}$ (ricordo che $B(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$) ponendo $g(z) = \overline{f(\frac{R^2}{\bar{z}})}$. Si provi che g è olomorfa in $B(\infty, R)$.

Esercizio 5 Si calcoli il raggio di convergenza delle serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n}}{\sqrt{n+1}}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} z^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} z^n$. d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(z-4)^n$.

Esercizio 6

a) Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - n)\, z^n$.

b) Si calcoli la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n+1}$.

Soluzioni: (Qui $z = x + iy = \rho\, e^{i\vartheta}$.)

1. La funzione è derivabile in $z = 0$, ma non è derivabile in nessun altro punto (non valgono le condizioni di Cauchy-Riemann), pertanto non è olomorfa in 0.

2. a) La funzione non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{C}$, non valendo le condizioni di Cauchy-Riemann. b) La funzione è derivabile in ogni punto di $\mathbb{C}$ e si ha $f'(z) = -i$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. c) Le condizioni di Cauchy-Riemann applicate a f e g implicano che tutte le derivate parziali di u e v sono nulle.

3. a) $z = \frac{1}{2} + in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. b) La seconda uguaglianza è verificata per $z = in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. c) $2n\pi + i\log(2 \pm \sqrt{3})$, $n \in \mathbb{Z}$. d) $i(2n\pi + \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Sia $f(z) = U(\rho, \vartheta) + iV(\rho, \vartheta)$. Per ipotesi U e V sono differenziabili e inoltre valgono le condizioni di Cauchy-Riemann $\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$ e $\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$. Si ponga $A(\rho, \vartheta) = U(\frac{R^2}{\rho}, \vartheta)$ e $B = -V(\frac{R^2}{\rho}, \vartheta)$. Si ha $g(z) = A(\rho, \vartheta) + iB(\rho, \vartheta)$. Le funzioni A e B sono differenziabili perché composte di funzioni differenziabili. Si verifichi che soddisfano anch'esse le condizioni di Cauchy-Riemann.

5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) 1, c) $\frac{1}{2}$, d) 2.

6. a) $\dfrac{2z^2}{(1-z)^3}$, b) $\dfrac{1}{2z}\log(\dfrac{1+z}{1-z})$ (1 se $z = 0$).