Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Corsi di laurea in
ingegneria civile e ambientale e ingegneria elettronica e informatica

Corso di Analisi Matematica 2. Anno Accademico 2026/2027

Prof. Franco Obersnel

Programma aggiornato

Serie numeriche e serie di funzioni. Il concetto di somma infinita. Serie di numeri complessi. Carattere di una serie. Termine generale di una serie. Ridotta (somma parziale) n-esima di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$. Condizione necessaria (non sufficiente) per la convergenza di una serie. Il carattere di una serie non viene modificato modificando un numero finito di termini. Successione di Cauchy in uno spazio metrico. Ogni successione convergente è di Cauchy. Spazi metrici completi. $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ sono completi (solo enunciato). Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie. Serie armonica. Dimostrazione della divergenza della serie armonica usando il criterio di Cauchy. Ordine di infinitesimo di una successione. Ordine reale, soprareale, sottoreale, infrareale (cenni). Integrali generalizzati (impropri) su $[a, +\infty[$. Criterio dell'ordine di infinitesimo per l'integrabilità. Le serie come particolari integrali impropri. Una serie converge se e solo se la funzione associata è integrabile (cenni di dimostrazione). Dimostrazione della divergenza della serie armonica usando l'integrale improprio. Aut aut per le serie a termini positivi. Criterio del confronto per le serie a termini positivi. Carattere della serie armonica generalizzata. Criteri del confronto asintotico e dell'ordine di infinitesimo. Criteri del rapporto e della radice $n-$esima. Se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine soprareale. Successioni e serie di numeri complessi. Legame tra la convergenza di una successione (e di una serie) di numeri complessi e la convergenza delle successioni (e delle serie) delle parti reale e immaginaria. Serie a termini complessi assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. L'esempio della serie di Leibniz. Criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Stima della somma di una serie a termini di segno alterno. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). Il teorema dei due limiti. Il teorema di continuità del limite uniforme. Il teorema di integrabilità del limite uniforme (dimostrazione per le funzioni continue). Il teorema sulla derivata del limite di una successione di funzioni (solo enunciato). Esempi e controesempi. Serie di funzioni. Serie puntualmente e uniformemente convergenti. Condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. $M-$Test di Weierstrass. L'utilizzo della stima d'errore di Leibniz per la dimostrazione della convergenza uniforme di una serie. Sviluppabilità di una funzione rispetto a una famiglia di funzioni base Φ. L'esempio delle serie di Fourier. Funzioni sviluppabili in serie di potenze di centro z_0. Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze. Convergenza uniforme nei dischi com-

patti strettamente contenuti nel disco di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza. Continuità della serie di potenze. Integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Derivazione a termine a termine di una serie di potenze. Funzioni analitiche. L'esempio della funzione $\frac{1}{1-x}$. Serie di Taylor di una funzione di classe $C^\infty(I)$. Sviluppabilità di una funzione in serie di potenze e polinomio di Taylor. Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Un criterio di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, l'arcotangente, il logaritmo, la serie binomiale, le funzioni arcoseno e arcocoseno. Le funzioni e^z , $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ nel campo complesso. La formula di Eulero.

Spazi metrici e geometria di $\mathbb{R}^N$. Punti e vettori di $\mathbb{R}^N$. Distanza euclidea. Nozione astratta di distanza in un insieme X. Spazio metrico. Limite di una successione. Successioni di Cauchy. Spazi metrici completi. L'esempio di $\mathbb{Q}$. Principali nozioni topologiche in uno spazio metrico: palla-aperta di centro x_0 e raggio ρ, intorni di un punto, proprietà degli intorni, punti interni, interno di un insieme, punti isolati, insiemi aperti. Punti di accumulazione, chiusura di un insieme, insiemi chiusi. Punti di frontiera, frontiera di un insieme. Proprietà degli aperti e dei chiusi. Nozione astratta di norma in uno spazio vettoriale X. Distanza indotta da una norma. La distanza del massimo d_∞ e la distanza integrale d_2 nello spazio $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Successioni di funzioni in distanza d_∞ e convergenza uniforme. Spazi di Banach. Nozione astratta di prodotto scalare in uno spazio vettoriale X. Norma indotta da un prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Disuguaglianza di Buniakowski-Cauchy-Schwarz (solo enunciato). Ortogonalità in uno spazio con prodotto scalare. Coseno dell'angolo tra vettori. Insiemi compatti (per successioni) in uno spazio metrico. Gli insiemi compatti sono chiusi. Insiemi limitati in uno spazio metrico. Diametro di un insieme. Gli insiemi compatti sono limitati. Densità di $\mathbb{Q}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Esempi di insiemi chiusi e limitati non compatti. Una successione converge in $\mathbb{R}^N$ se e solo se convergono le successioni delle coordinate. Caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}^N$. Funzioni tra spazi metrici. Limite di una funzione definita tra spazi metrici. Funzioni continue. Campi scalari e campi vettoriali tra $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$. Curve e superfici parametriche. Grafico di un campo scalare. Equazione cartesiana implicita di una retta nel piano, vettore ortogonale. Equazione cartesiana esplicita, equazione parametrica. Retta e segmento congiungente due punti. Curve di $\mathbb{R}^2$: equazione cartesiana, equazione parametrica, come grafico di una funzione. Piani e superfici di $\mathbb{R}^3$; equazione cartesiana implicita, equazione esplicita, equazione parametrica. Vettore ortogonale di un piano. Disegnare il grafico di una funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: proiezioni sui piani coordinati, insiemi di livello. Equazione parametrica della sfera e dell'ellissoide. Curve in $\mathbb{R}^3$ in forma parametrica e come insieme degli zeri di un campo vettoriale $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Ripasso dei teoremi sui limiti (senza dimostrazioni), in particolare i teoremi sul limite delle funzioni composte e sul limite della restrizione. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x^0}$ di una funzione. Studio della restrizione di una funzione vincolata a una curva o a una superficie parametrica. Le restrizioni

$f(x_0, \cdot)$ e $f(\cdot, y_0)$. Limiti e continuità di un campo vettoriale. Rappresentazione grafica di un campo vettoriale $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Applicazioni lineari. Una funzione lineare tra spazi euclidei è continua. Esempi di funzioni lineari tra spazi di Banach non-continue. Teorema di compattezza per funzioni tra spazi metrici. Teorema di Weierstrass per funzioni definite su uno spazio metrico. Teorema della continuità uniforme (Heine-Cantor) per funzioni tra spazi metrici (dimostrazione facoltativa). Insiemi connessi per archi. Teorema di connessione. Teorema di esistenza degli zeri.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$. Derivate direzionali e derivate parziali. L'esistenza delle derivate direzionali non implica la continuità. Il calcolo delle derivate parziali. Funzioni differenziabili. Differenziale. Approssimante lineare. Interpretazione geometrica della differenziabilità per un campo scalare di $\mathbb{R}^2$: piano tangente. Continuità di una funzione differenziabile. Esistenza e formula per il calcolo delle derivate direzionali di una funzione differenziabile. Matrice Jacobiana. Gradiente di un campo scalare. Vettore tangente di una curva. Teorema di differenziabilità della funzione composta. Il caso particolare della restrizione di un campo scalare a una curva. Linee coordinate sulla superficie. (meridiani e paralleli della sfera). Piano tangente una superficie. Ortogonalità tra un vettore e una curva in $\mathbb{R}^2$ e tra una superficie e un vettore in $\mathbb{R}^3$. Vettore normale di una superficie. Derivate parziali delle funzioni composte (chain rule). Un esempio: soluzioni dell'equazione del trasporto $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Coordinate sferiche nello spazio: calcolo del determinante Jacobiano. Proprietà geometriche del vettore gradiente: ortogonalità tra il gradiente di un campo scalare di $\mathbb{R}^2$ e le sue curve di livello, ortogonalità tra il gradiente di un campo scalare di $\mathbb{R}^3$ e le sue superfici di livello; direzione di massimo incremento di un campo scalare di $\mathbb{R}^N$. Teorema del differenziale totale (solo enunciato). Esempio di funzione differenziabile con derivate non continue. Formula del valor medio per i campi scalari. La formula non vale per i campi vettoriali. Funzioni con derivate nulle sugli aperti connessi. Punti di estremo (minimo o massimo) assoluti e relativi e punti di sella di un campo scalare. Punti critici. Test del gradiente (teorema di Fermat). Derivate direzionali e derivate parziali di ordine k. Esempio in cui le derivate miste non sono uguali. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (solo enunciato). Calcolo del differenziale di funzioni lineari, bilineari, quadratiche, del tipo $\varphi(x) = \langle x, w\rangle$ con $w \in \mathbb{R}^N$ vettore fissato, $\varphi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$, $\varphi(x) = \|x\|$, $\varphi(x) = \langle Ax, v\rangle$ e $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle$ con A matrice quadrata. Calcolo del gradiente di una funzione del tipo $f(x) = \langle \varphi(x), v\rangle$ con $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Un punto di sella in $\mathbb{R}^2$ per una funzione differenziabile è un punto critico. Funzioni due volte differenziabili in un punto. Matrice Hessiana di un campo scalare. Teorema di Young (solo enunciato) sulla simmetria della matrice Hessiana. Differenziale secondo di una funzione in un punto. Derivate direzionali seconde di una funzione due volte differenziabile e loro rappresentazione mediante la matrice Hessiana. Condizione sufficiente per la due volte differenziabilità di una funzione in un punto. Teorema di esistenza dell'approssimante di ordine 2 di una funzione due volte differenziabile in un punto (polinomio di Taylor). Segnatura di una forma quadratica: forme quadratiche

definite positive, definite negative, indefinite. Proprietà delle forme quadratiche definite positive (o negative). Test del differenziale secondo per la classificazione dei punti critici. Studio di una funzione in più variabili. Vincoli in $\mathbb{R}^N$. Vincoli espliciti e vincoli impliciti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Punti di estremo vincolato per campi scalari. Il teorema della funzione implicita in dimensione 2 (teorema di U. Dini). Derivabilità della funzione implicita. Derivata seconda della funzione implicita. Esempio di studio di una funzione implicitamente definita. Teorema di parametrizzabilità locale di una curva piana. Teorema del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato a una curva in $\mathbb{R}^2$. Il teorema della funzione implicita nel caso di una funzione $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (superficie in $\mathbb{R}^3$) (solo enunciato). Parametrizzabilità locale di una superficie di $\mathbb{R}^3$. Il teorema del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato a una superficie in $\mathbb{R}^3$. Parametrizzabilità locale di una curva di $\mathbb{R}^3$ (solo enunciato). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato a una curva in $\mathbb{R}^3$ (solo enunciato). Integrali dipendenti da un parametro. Continuità e derivabilità della funzione $h(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$. Derivata di una funzione del tipo $h(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx$.

Calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$. $N-$Rettangoli e decomposizioni di $\mathbb{R}^N$. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori e loro proprietà. Integrale inferiore e integrale superiore. Funzioni integrabili secondo Riemann su un $N-$rettangolo. Esempio di funzione non integrabile. Interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non-negativa in $\mathbb{R}^2$. Proprietà fondamentali dell'integrale: linearità dell'integrale e integrabilità del prodotto (solo enunciati), monotonia dell'integrale (con il caso particolare delle funzioni continue), integrabilità della restrizione e additività dell'integrale (solo enunciati), integrabilità del valore assoluto (solo enunciato), teorema della media integrale. Teorema di integrabilità delle funzione continue sui rettangoli. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali doppi sui rettangoli (solo enunciato). Esempi in cui non vale il teorema di Fubini. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali tripli sui $3-$rettangoli di $\mathbb{R}^3$ (solo enunciato): formule di riduzione per corde e per sezioni. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. La definizione non dipende dal rettangolo. Insiemi misurabili e misura di Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$. Esempi di insiemi non misurabili. Insiemi di misura nulla (trascurabili). Plurirettangoli. Teorema di caratterizzazione degli insiemi di misura nulla.