In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$\%$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2026}$ (R) $*$ Calcolare la mediana di questo dataset

$$\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{5},\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{7},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{6},\ \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\tfrac{1}{8}}$$

(Mettiamo in ordine crescente i 9 valori del dataset

$$\begin{aligned}
-\tfrac{5}{6} &= \quad -0.8333...\\
-\tfrac{3}{4} &= \quad -0.75\\
-\tfrac{2}{7} &= \quad -0.2857...\\
-\tfrac{1}{5} &= \quad -0.2\\
\tfrac{1}{8} &= \quad +0.125\\
\tfrac{1}{2} &= \quad +0.5\\
\tfrac{2}{3} &= \quad +0.6666...\\
\tfrac{4}{3} &= \quad +1.3333...\\
\tfrac{3}{2} &= \quad +1.5
\end{aligned}$$

e quello centrale cioè $\frac{1}{8}$ è la mediana).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2026}$ (R) $*$ Relativamente ai test diagnostici, trovare cosa deve stare al posto del punto interrogativo:

$$\text{specificità} = \frac{?}{V_- + F_+}$$

$$\boxed{V_-}$$

(Si tratta del rapporto dei veri negativi e il totale dei sani.).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2026}$ (R) * Quali di questi non può essere un p-value?
0.05 0.95 0.045 0.7324 3.231E-4 6.132E2

$$\boxed{6.132\text{E}2}$$

(Il p-value è una probabilità – di definizione un po' sottile ma comunque una probabilità – e allora è ≤ 1 mentre
6.132E2 cioè 613.2
è > 1).

ESERCIZIO 1$_{\mu 2026}$ $*$ Vediamo qualche elemento di trigonometria usatissimo in Fisica, e di esponenziali e logaritmi, usatissimi in Fisica e Chimica. Risolvere l'equazione

$$10^{2x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}}{1000}$$

e potrà essere utile ricordare che il seno di un angolo retto vale 1, e magari l'identità goniometrica (o trigonometrica) fondamentale per ricavare il coseno se non lo si sa a memoria.

SVOLGIMENTO

Il coseno di $\frac{\pi}{2}$ è un valore fondamentale e notissimo ed è 0 ma se non lo ricordiamo a memoria lo ricaviamo come segue.
L'identità goniometrica (o trigonometrica) fondamentale è

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (*)$$

(da alcuni scritta col simbolo $\equiv$ invece che $=$ in ragione del fatto che vale per ogni numero reale x).
L'angolo retto, metà dell'angolo piatto di π radianti, è quello di $\frac{\pi}{2}$ radianti e allora, come ci dice il testo dell'esercizio,

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

e mettendo quest'ultima in $(*)$ con $x = \frac{\pi}{2}$

$$1^2 + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Big/ + (-1)$$

$$\cos^2\frac{\pi}{2} = 0$$

da cui

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Col valore qua sopra trovato – o già noto a memoria – del coseno, e col valore dato nel quesito per il seno, l'equazione data diventa

$$10^{2x} = \frac{1+0}{1000}$$

$$10^{2x} = \frac{1}{10^3}$$

$$10^{2x} = 10^{-3}$$

$$\Big/ \lg$$

$$2x = -3$$

e infine

$$\boxed{-\tfrac{3}{2}}$$

ESERCIZIO 2$_{\mu 2026}$ ≈ Calcolare la media geometrica dei primi 4 termini della successione di Fibonacci 1, 1...

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

La successione di Fibonacci, quando fatta iniziare da 1, 1, è

$$1\ 1\ 2\ 3\ 5...$$

(ogni numero è la somma dei 2 precedenti) e allora il nostro dataset è

$$1\ 1\ 2\ 3$$

La media geometrica (*geometrical mean* in inglese, e qua la indicheremo con GM) di n numeri positivi è la radice n-esima del loro prodotto:

$$GM(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

Adesso $n = 4$ per il nostro dataset e si ha

$$GM(1, 1, 2, 3) = \sqrt[4]{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{6} =$$

che con la formula di riduzione della radice quarta a 2 radici quadrate diventa

$$= \sqrt{\sqrt{6}} \approx$$

$$= \sqrt{2.44949} \approx$$

$$\boxed{\approx 1.5651}$$

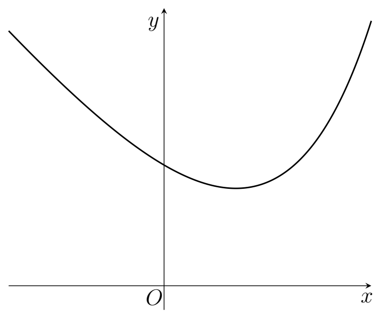
o anche e probabilmente meglio

$$\boxed{\approx 1.565}$$

o addirittura

$$\boxed{\approx 1.57}$$

ESERCIZIO 3$_{\mu 2026}$ $*$ Calcolare il minimo di $\mathrm{e}^x - 2x + 1$.



SVOLGIMENTO

Deriviamo la funzione data che chiamiamo $f(x)$

$$f'(x) = \mathrm{D}\ (\mathrm{e}^x - 2x + 1) =$$

sommando le derivate di e^x, di $-2x$ e di $+1$ ottenendo la disequazione

$$= \mathrm{e}^x - 2 > 0$$

$$\Big/ + 2$$

$$\mathrm{e}^x > 2$$

$\Big/ \ln$ (funzione crescente che conserva l'ordinamento)

$$x > \ln 2$$

e cioè

$f'(x) > 0$ per $x > \ln 2$ ... funzione crescente

$f'(x) < 0$ per $x < \ln 2$ ... funzione decrescente

e allora $x = \ln 2$ è l'unico punto di minimo.

Il minimo allora è

$$\min f = f(\ln 2) =$$

$$= \mathrm{e}^{\ln 2} - 2\ \ln 2 + 1 =$$

$$= 2 - 2\ \ln 2 + 1 =$$

$$\boxed{3 - 2\ \ln 2}$$

ovvero per una proprietà dei logaritmi

$$\boxed{3 - \ln 4}$$

ESERCIZIO 4$_{\mu 2026}$ $^{\%}$ Su certe piante si fanno particolari operazioni per fargli produrre (in quantità utili) principi attivi di interesse farmaceutico. (Per esempio una manipolazione meccanica sulla *Vanilla planifolia* per la vanillina, stress luminosi sull'*Artemisia annua* per l'artemisina). Supponiamo che su una specie di pianta si possano effettuare due diverse operazioni affinché producano un certo principio attivo, con le seguenti probabilità di successo:

P(ottenere il principio attivo facendo l'operazione A) = 70%
P(ottenere il principio attivo facendo l'operazione B) = 60%

Supponendo l'indipendenza, qual è la probabilità di ottenere il principio attivo facendo entrambe le operazioni?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Con gli eventi complementari

P(insuccesso operazione A) = 0,3
P(insuccesso operazione B) = 0,4

e per l'indipendenza

P(insuccesso sulle 2 operazioni) $= 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$

e infine con l'evento complementare

P(successo almeno 1 operazione) $= 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

e infine in forma percentuale

$$\boxed{88\%}$$

OPPURE

con la classica formula

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) =$$

$$= 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88$$

si conclude come prima.

ESERCIZIO 5$_{\mu 2026}$ (R) $\ast$ Abbiamo saputo che la (fittizia) azienda Tyrell Corporation ha una lista di virus da loro ingegnerizzati (dicono a scopo di studio e *preparedness*) con numeri progressivi da 0 in poi, fino a m, sconosciuto. In qualche modo siamo venuti a conoscere questi numeri presenti nella lista

00321 01521 00627

Supponendo – ed è un'approssimazione – che quello sopra sia un campione indipendente uniforme su $\{0, ..., m\}$, con l'usuale stimatore dei momenti stimare m (che è il numero di diversi virus prodotti, meno 1, perché la lista parte da 0, ma di questo non ci occupiamo, e non cambia molto).

SVOLGIMENTO

Lo stimatore dei momenti $\hat{m}$ del parametro m di una variabile aleatoria X uniforme discreta su $\{0, ..., m\}$ è notoriamente il doppio della media del campione di n elementi:

$$\hat{m} = 2 \cdot \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

e adesso

$$2 \cdot \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{321 + 1521 + 627}{3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2469}{3} =$$

$$= 2 \cdot 823 =$$

$$\boxed{1646}$$

Nota 1. I numeri del quesito sono scritti con *zeri iniziali*, in inglese *leading zeroes*. Dal punto di vista informatico sono codici numerici a lunghezza fissa, spesso chiamati *identificativi con padding di zeri*.

Nota 2. Per questo genere di problemi lo stimatore dei momenti qua sopra usato è naturale e semplice e molto meglio che niente, ma non è ottimale dal punto di vista della Statistica.