Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$\%$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2026}$ (R) $\approx$ Per una persona di 78 kg e altezza 174 cm calcolare l'indice di massa corporea (IMC) ovvero *Body Mass Index* (BMI) definito da

$$\text{IMC} = \frac{peso}{altezza \times altezza}$$

col peso in chilogrammi e l'altezza in metri.

$$\boxed{\approx 25.8}$$

(Col peso di 78 kg e l'altezza di 1.74 m

$$\text{IMC} = \frac{78}{1.74 \times 1.74} = \frac{78}{3.0276} \approx 25.763$$

e ovviamente bisognava stare attenti che i 174 cm sono 1.74 m).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2026}$ (R) $*$ Trovare la parte mancante nella classica formula relativa agli eventi indipendenti:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = ...$$

$$\boxed{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)}$$

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2026}$ (R) $\ast$ Trovare la parola[1] mancante:

Concetto centrale della Statistica dei test è quello degli errori di I e II ...

$$\boxed{\text{specie}}$$

ovvero all'inglese

$$\boxed{\text{tipo}}$$

ESERCIZIO 1$_{\mu 2026}$ $\ast$ Durante una campagna vaccinale nella settimana 10 sono state effettuate 8 500 vaccinazioni e nella settimana 30 sono state effettuate 14 500 vaccinazioni. Si assuma che in quel periodo l'andamento delle vaccinazioni settimanali possa essere modellato da una retta.
Dopo aver trovato l'equazione della retta calcolare quante vaccinazioni sono state effettuate nella settimana 24, secondo il modello.

SVOLGIMENTO

I dati forniti individuano questi 2 punti del piano cartesiano tOy del tempo t (in settimane) e del numero y di vaccinazioni:

$$(10,\, 8500) \quad \text{e} \quad (30,\, 14500).$$

Con l'equazione della retta per 2 punti
(???)
L'equazione della retta cercata è quindi:

$$y = 300\,t + 5500.$$

Allora alla settimana 24 il numero di vaccinazioni settimanali è

$$y(24) = 300 \cdot 24 + 5500 = 7200 + 5500 = 12\,700.$$

$$\boxed{12\,700}$$

ESERCIZIO 2$_{\mu 2026}$ $\ast$ Trovare la *media interquartile* del seguente dataset:

$$\lg 25,\ \lg\sqrt{2},\ \lg 137,\ \lg 8,\ \lg\tfrac{3}{2},\ \lg 256, \lg 5,\ \lg 2,\ \lg\sqrt{3},\ \lg 137,\ \lg 125,\ \lg 4.$$

[1] Si può rispondere con una parola, o con un'altra che è sinonimo.

Naturalmente una soluzione contenente logaritmi è già qualcosa, ma in questo esercizio si richiede il *valore numerico* del risultato.

SVOLGIMENTO

La funzione logaritmo in base 10 è crescente e allora l'ordinamento del dataset può essere effettuato ordinando gli argomenti:

$$\lg\sqrt{2},\ \lg\tfrac{3}{2},\ \lg\sqrt{3},\ \Big|\lg 2,\ \lg 4,\ \lg 5,\ \Big|\lg 8,\ \lg 25,\ \lg 125,\ \Big|\lg 137,\ \lg 137,\ \lg 256$$

(E sì, $\sqrt{2}$ e $\frac{3}{2}$ e $\sqrt{3}$ e 2 sono in quest'ordine perché numericamente sono ≈ 1.41 e 1.5 e ≈ 1.73 e 2).
Il dataset è composto da $n = 12$ elementi, ed eliminando il primo e l'ultimo quartile rimangono i seguenti 6 elementi centrali:

$$\lg 2,\ \lg 4,\ \lg 5,\ \lg 8,\ \lg 25,\ \lg 125.$$

La media interquartile è data dalla media aritmetica di tali valori:

$$\overline{x}_{IQ} = \frac{1}{6}\Big(\lg 2 + \lg 4 + \lg 5 + \lg 8 + \lg 25 + \lg 125\Big) =$$

che è il valore esatto cercato ma molto malamente espresso, e con la proprietà fondamentale dei logaritmi

$$= \frac{1}{6}\lg\Big(2\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 25\cdot 125\Big) =$$

$$= \frac{1}{6}\lg 1\,000\,000 =$$

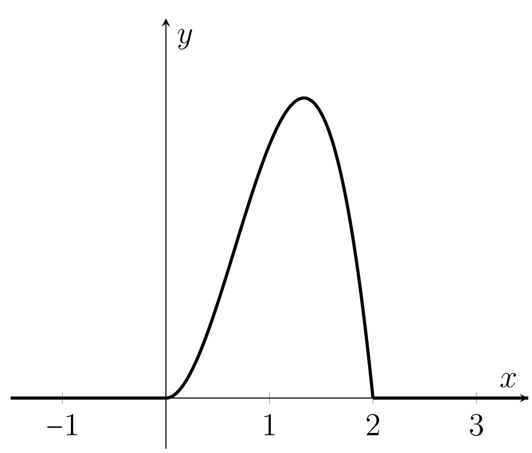
$$= \frac{1}{6}\cdot 6 =$$

$$\boxed{1}$$

ESERCIZIO 3$_{\mu 2026}$ $\ast$ Determinare se

$$f(x) := \begin{cases} 2\,x^2 - x^3 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità, ovvero se l'integrale da 0 a 2 vale 1 (visto che si tratta di funzione molto regolare non negativa su $\mathbb{R}$, come si capisce subito e anche un po' si vede dal grafico: l'unica condizione ulteriore da accertare è proprio che abbia integrale unitario).



SVOLGIMENTO

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\int_0^2 (2\,x^2 - x^3)\,\mathrm{d}\,x =$$

una primitiva di $2\,x^2 - x^3$ si calcola, con la classica primitiva $\frac{x^n}{n+1} + c$ di x^n, primitivando separatamente (perché l'integrale "passa sopra" somme e differenze)
• $2\,x^2$, che ci dà $2\,\frac{x^3}{3} + c$, e qua ricordiamo che l'integrazione "passa sopra" cost·,
• x^3, che ci dà $\frac{x^4}{4} + c$

$$= \left[2\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= 2\,\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} - 0 =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{16}{4} =$$

$$= \frac{16 \cdot 4 - 16 \cdot 3}{3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{16}{12} \neq 1$$

e allora

$$\boxed{\text{non è una densità di probabilità}}$$

Nota. Si noti che se si sostituisce $2\,x^2 - x^3$ con $\frac{3}{4}\,(\,2\,x^2 - x^3)$ si ottiene effettivamente una densità di probabilità perché l'integrale diventa unitario.

ESERCIZIO 4$_{\mu 2026}$ %

Calcolare la sensibilità di un test rapido antigenico per il COVID-19, per il quale si trovano in un articolo scientifico(*) i seguenti risultati:

	Infetti	**Non infetti**
Positivo	128	2
Negativo	33	815

(*) Van der Moeren N, Zwart VF, Lodder EB, et al. *Evaluation of the test accuracy of a SARS-CoV-2 rapid antigen test in symptomatic community dwelling individuals in the Netherlands.* PLOS ONE. 2021;16(5):e0250886. doi:10.1371/journal.pone.0250886. PMC8118553.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

$$
\begin{aligned}
\text{sensibilità} &= \frac{V_+}{V_+ + F_-} = \\
&= \frac{128}{128+33} = \\
&= \frac{128}{161} \approx \\
&\approx 0.79503 \approx \\
&\boxed{\approx 79.5\%}
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 5$_{\mu2026}$ ≈ Si consideri un neurone in condizioni di attività spontanea, senza stimolazione esterna. Si registrano i seguenti tempi di attesa (in millisecondi) tra due potenziali d'azione consecutivi (*inter-spike intervals*):

$$
\begin{gathered}
9.39,\ 60.20,\ 26.33,\ 18.26,\ 3.39,\ 3.39,\ 1.20, \\
18.38,\ 24.63,\ 0.42,\ 70.07,\ 35.73,\ 4.77,\ 4.01.
\end{gathered}
$$

Ipotizzando (in via semplificata) che i tempi siano realizzazioni (i.i.d., indipendenti e identicamente distribuite) di una variabile aleatoria $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ e cioè esponenziale, si stimi nel modo consueto il parametro λ.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

La media campionaria del campione di $n = 14$ valori è

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_{14} = \frac{1}{14}(&9.39 + 60.20 + 26.33 + 18.26 + 3.39 + 3.39 + 1.20+ \\
&+18.38 + 24.63 + 0.42 + 70.07 + 35.73 + 4.77 + 4.01) = \\
&= \frac{310.39}{15} \approx 20.0121
\end{aligned}
$$

e con il consueto stimatore (di massima verosimiglianza) che è il reciproco della media

$$
\hat{\lambda} \approx \frac{1}{20.0121} \approx
$$

$$
\boxed{\approx 0.05}
$$