Legenda
$*$ É richiesto il valore esatto. In certi casi puó essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
La valutazione é complessiva ma é ovvio che gli esercizi non pesano tutti allo stesso modo. In prima approssimazione, si valuti ogni $\bullet$ cinque punti e ogni $\circ$ due punti e mezzo, con ulteriori rivalutazioni per chiarezza e completezza, e i punteggi 30, 31 e 32 sono ammissibili alla lode.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.

SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

$\boxed{\text{RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI}}$

MATEMATICHE ELEMENTARI

A $\circ *$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unitá di misura).
Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unitá di misura. (Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la piú ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento
Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioé a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl), \quad (18\,h, 82\,mg/dl) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (8, 50), \quad (18, 82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t-t_2}{t_1-t_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

$$\frac{t-18}{8-18} = \frac{y-82}{50-82}$$

$$\frac{t-18}{-10} = \frac{y-82}{-32} \quad \Big/ \cdot (-1)\cdot 10 \cdot 32$$

$$32\,(t-18) = 10\,(y-82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \tfrac{16}{5}\,t + \tfrac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl). (Se per errore – é ben detto nel quesito che i tempi partono dallo 0 della mezzanotte – si trasformano le ore 6:00 nell'ascissa 6 invece che 18, si ottiene $y = -16\,t + 178$, che é addirittura *decrescente*, mentre é evidente che la concentrazione é *aumentata* nel tempo, dalla mattina alla sera).

B • ∗ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2\,\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento

Con la formula di addizione del coseno

$$2\left(\cos x\,\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

e con il secondo membro cosí riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\,\sin x$$

$$-\sqrt{3}\,\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\tfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

CALCOLO INFINITESIMALE

A $\circ *$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5\,x^2 + 3\,x}{3\,x^4 - 7\,x^2}$$

Svolgimento

Raccogliendo a numeratore e denominatore i monomi di grado massimo e poi semplificando

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\,(5 + \frac{3}{x})}{x^4\,(3 - \frac{7}{x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{5 + \frac{3}{x}}{3 - \frac{7}{x^2}} =$$

(qua in qualche modo si ha, seppure la scrittura non é perfetta, $\frac{1}{+\infty} \cdot \frac{5+\frac{3}{-\infty}}{3-\frac{7}{+\infty}}$)

$$= 0 \cdot \frac{5+0}{3-0} =$$

$$\boxed{0}$$

(Alternativamente, si puó semplificare numeratore e denominatore per il monomio di grado massimo, privato del suo coefficiente, e cioé per x^4, ottenendo $\frac{\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{7}{x^2}}$,che al limite per $x \to +\infty$ dá $\frac{0+0}{3-0} = 0$).

B $\bullet * \approx$ Trovare il minimo di

$$h(z) := z^4 - z^3$$

Svolgimento

Derivando la funzione $h(z)$

$$h'(z) = D\,(z^4 - z^3) = 4\,z^3 - 3\,z^2 = z^2\,(4\,z - 3)$$

e risolvendo la disequazione $h'(z) > 0$

$$z^2\,(4\,z - 3) > 0$$

si ha subito

$$h'(z) > 0 \;\Leftrightarrow\; z > \frac{3}{4} \qquad h'(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{3}{4} \vee z = 0$$

da cui lo schema di crescenza e decrescenza

$-0--\frac{3}{4}++\quad h'(z)>0$

$\searrow \quad \searrow \quad \nearrow$

e allora il punto di minimo relativo e assoluto $z=\frac{3}{4}$ e in conclusione

$$\min h = h\Big(\frac{3}{4}\Big) = \Big(\frac{3}{4}\Big)^4 - \Big(\frac{3}{4}\Big)^3 =$$

$$= \frac{3^4 - 4\cdot 3^3}{4^4} = \frac{81-108}{256}$$

cioé

$$\boxed{-\tfrac{27}{256} \approx -0.105}$$

(In 0 la funzione é decrescente con derivata 0 e c'é un flesso orizzontale).

......%.... y $\uparrow$...........%........

......%......|..........%........

........%....|...........%........

..........%..|..........%..........

------------%%%----$\frac{3}{4}$--%----------$\rightarrow x$

............^{0}|...%....%...........

..........$-\frac{27}{256}$|.....%%............ (Grafico molto approssimativo).

.............|....................

CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

A $\circ * \approx$ $^{\%}$ Si scrivono su 5 foglietti le lettere della parola *carte*, si mettono in una scatola, e si estraggono a caso uno dopo l'altro. Che probabilitá c'é che escano nell'ordine c, e, r, t, a?

Svolgimento

$$p = \frac{\#\, casi\; favorevoli}{\#\, casi\; possibili} =$$

essendo i casi favorevoli 1 e quelli possibili le 5! permutazioni di 5 elementi

$$= \frac{1}{5!} =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{120} \approx 0.00833 = 0.833\%}$$

B $\bullet * \approx$ $^{\%}$ Una certa affezione, quando insorge ha una durata in giorni (interi) che ha densitá geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{2}$. Qual é la probabilitá che duri un numero pari di giorni?

Svolgimento

Detta X la durata dell'affezione, ricordando la $p_k = p(1-p)^{k-1}$ che caratterizza la densitá geometrica iniziante da 1, ora $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ ovvero $\frac{1}{2^k}$, si ha

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{2^n} \ldots \end{pmatrix}$$

$$P(X\ pari) = P(X \in \{2, 4, 6...\}) =$$
$$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + ... =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

che si riconosce esser serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$ (perché ogni termine é pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

(Si noti che allora é piú probabile che duri un numero dispari di giorni. Questo rimane vero con qualunque valore di $p \in]0, 1[$, non solo $\frac{1}{2}$, e perfino con qualunque densitá decrescente definita su 1,2,3... A Trieste si dice che il vento Bora tende a durare un numero dispari di giorni).

STATISTICA INFERENZIALE

A $\circ *$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A, ad un certo livello α, la regione critica sia $[20.18, +\infty[$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 19.2, e che sia vera A. Quale delle seguenti affermazioni é vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si é sostanzialmente perso tempo
- Non é possibile rispondere perché non é specificato il quantile

Svolgimento

Lo stimatore T vale 19.2 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) é falsa (perché é vera l'alternativa). Allora "male non respingo ipotesi falsa", cioé

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$

B • ∗ Si abbiano queste misurazioni di un certo parametro fisiologico su diversi soggetti, da considerarsi campione gaussiano:

6.26 5.51 3.75 8.27 7.13 4.31 6.52 4.7 6.73 3.58 7.03.

Al livello (di significativitá) $\alpha = 0.005$ verificare il test

$$H : \mu \leq 4.5 \qquad A : \mu > 4.5.$$

Si dá qua il quantile di Student opportuno $t_{0.995}(10) \approx 3.1693$.
(Si calcoli la media $\bar{x}$, e poi si sappia che $\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x})^2 = 23.6227$).

Svolgimento

Ricordiamo come si fa questo Test di Student: coi valori x_1,..,x_n si calcola

$$T := \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \qquad \text{e se supera} \qquad t_{1-\alpha}(n-1)$$

si respinge l'ipotesi, altrimenti "non la si respinge".
Adesso naturalmente $\mu_0 = 4.5$ e la numerositá ovvero rango del campione é $n = 11$ e la determinazione $\bar{x}_{11}$ ovvero $\bar{x}$ della media campionaria $\bar{X}_{11}$ é

$$\bar{x} = (6.26+5.51+3.75+8.27+7.13+4.31+6.52+4.7+6.73+3.58+7.03)/11 \approx$$

$$\approx 5.79909$$

La varianza campionaria S^2, stimatore non distorto della varianza σ^2, é

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$$

tenendo conto del risultato giá fornito nel testo del quesito

$$= \frac{1}{11-1}\,23.6227 = 2.36227$$

ed estraendo la radice quadrata

$$S_{11} \approx 1.53697$$

e allora lo stimatore T

$$T := \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \approx$$

$$\approx \sqrt{11}\,\frac{5.79909 - 4.5}{1.53697} \approx 2.80331 \not> 3.1693 \text{ non supera}$$

il quantile di Student (il cui valore numerico approssimato ci é stato dato)

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{1-0.005}(11-1) = t_{0.995}(10) \approx 3.1693$$

e allora

$$\boxed{\text{L'ipotesi } \mu \leq 4.5 \text{ non é respinta al livello } \alpha = 0.005}$$

(Si noti che accontentandoci di un'affermazione meno stringente, al 99% invece che 99.5%, siamo in grado di respingere l'ipotesi nulla – che é ció che in generale si vorrebbe – perché $t_{0.99}(10) \approx 2.764$).

19 febbraio 2018 – vale per questo esame
REGOLAMENTO D'ESAME – Questo foglio resta allo studente

All'esame scritto non é permesso usare il telefono cellulare né alcuna strumentazione elettronica avanzata. Neppure calcolatrici programmabili, in cui si potrebbero memorizzare formule e procedimenti che invece bisogna conoscere. (Altrimenti l'esame potrebbe diventare una gara a chi meglio sa ingannare, o puó ingannare con costosi dispositivi). Bisogna invece portare una semplice calcolatrice non programmabile con le 4 operazioni (dalla somma alla divisione) e anche la radice quadrata, ma *non* logaritmi, esponenziali, media, varianza, eccetera. (Si intende che della varianza bisogna sapere la formula e capire il significato, non schiacciare un tasto). Chi sará sprovvisto di calcolatrice verrá comunque ammesso all'esame ma non é permesso passarsi calcolatrici durante l'esame, e allora conviene portarne una. Si puó portare un semplice orologio, ma, ripetiamo, non si puó usare il telefono cellulare, che deve rigorosamente restare SPENTO nello zainetto o borsa.

Il compito si consegna entro un'ora e mezza dall'inizio dell'esame.

Scrivere il nome e cognome su tutti i fogli che si ricevono, compresi questo, i fogli coi quesiti, i fogli di bella copia e i fogli di brutta copia, e ovviamente non devono girare fogli fra gli studenti.

Si possono richiedere fogli di carta aggiuntivi, per brutta copia o bella copia, ma non si possono assolutamente usare fogli propri.

I fogli vanno consegnati piegati in due tutti insieme, ben raccolti in un "plico".

Non usare penne rosse né bianchetto.

SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Si puó cancellare errori o tentativi non riusciti sovrapponendovi una rigatura, piú o meno fitta, senza preoccupazioni "estetiche", lasciando solo la versione definitiva ovvero bella copia.

Non consegnare assolutamente la brutta copia; per ogni quesito deve esserci una sola risposta, da considerare "bella copia", non si puó "tentare" o "partecipare" con piú versioni, sperando che qualcuna vada bene.

Il testo del compito e sperabilmente anche i risultati e magari anche gli svolgimenti verranno messi su internet.

In ogni momento della prova scritta d'esame ci si puó ritirare consegnando solo il testo del compito con sovrascritta una grande R (come "Ritirato").

Anche soluzioni incomplete verranno valutate.

Entro 24 ore dall'esame gli studenti di anni precedenti a questo attuale – che comunque devono fare questo esame scritto come tutti – possono con email chiedere prolungamento orale dell'esame, se ritengono che gli argomenti trattati nel loro anno non fossero sufficienti per risolvere qualche esercizio di questo esame scritto; in quel caso concorderemo un esame orale a cui verranno col programma del loro anno, stampato su carta, e possibilmente anche gli appunti, ed esamineremo eventuali differenze relativamente ai quesiti di questo esame.

Entro venerdí alle 18:00 dovrebbero esserere pubblicati i punteggi (voti) sulla pagina web del docente; sono voti provvisori, non sono ancora registrati.

Entro due ulteriori giorni e cioé entro le 18:00 della domenica successiva all'esame scritto, ci si puó ancora ritirare (verosimilmente per rifare meglio) con email.

Il giorno seguente, il lunedí successivo all'esame scritto, i voti positivi (cioé maggiori o uguali a 18) verranno registrati (e diventano definitivi), e i voti negativi "scompaiono". **I tempi saranno abbreviati in esami futuri.**

Nell'ultimo appello di settembre i sopradetti tempi dovranno di necessitá essere molto abbreviati, perché il tempo per registrare voti finisce.

Se si scrive al docente bisogna farlo dall'account istituzionale, cioé dall'email che l'universitá fornisce ad ogni studente. Invece puó ben succedere che email inviate da indirizzi privati vengano dall'universitá automaticamente classificate come *spam*, e all'atto pratico vadano perdute.

$*$ É richiesto il valore esatto. In certi casi puó essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
La valutazione é complessiva ma é ovvio che gli esercizi non pesano tutti allo stesso modo. In prima approssimazione, si valuti ogni $\bullet$ cinque punti e ogni $\circ$ due punti e mezzo, con ulteriori rivalutazioni per chiarezza e completezza, e i punteggi 30, 31 e 32 sono ammissibili alla lode.