Legenda
$*$ É richiesto il valore esatto. In certi casi puó essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
% É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

1 – MATEMATICHE ELEMENTARI

A $\circ$ $*$ Le etichette per identificare delle provette in un laboratorio sono marcate con una lettera (inglese ovvero internazionale) minuscola o maiuscola, seguita o no da una cifra decimale (cioé da 0 a 9). Quante etichette diverse si possono cosí produrre?
(Ecco per maggior chiarezza alcune delle stampigliature: a, h7, C, Z2...).

Svolgimento
Abbiamo l'insieme delle lettere (minuscole o maiuscole)
$L := \{a, ..., z, A, ..., Z\}$ di cardinalitá 26+26=52
e l'insieme delle cifre
$C := \{0, ..., 9\}$ di cardinalitá 10.
Ci sono 2 insiemi di etichette:
$A := \{$etichette con solo 1 lettera$\}$ e questi sono 52, cardinalitá di L.
$B := \{$etichette con 1 lettera seguita da 1 cifra decimale$\}$, di cardinalitá 520 perché B é in corrispondenza biunivoca col prodotto cartesiano $L \times C$ che ha cardinalitá

$$\#(L \times C) = \#L \cdot \#C = 52 \cdot 10 = 520.$$

L'insieme E delle etichette é l'unione disgiunta $A \cup^* B$ e allora ha cardinalitá

$$\#E = \#(A \cup^* B) = \#A + \#B = 52 + 520 =$$

$$\boxed{572}$$

B $\bullet$ $*$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unitá di misura, h e poi nmoli/L).
Con la retta per i 2 punti si puó ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la piú ragionevole approssimazione. Con l'equazione

esplicita di quella retta, senza unitá di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione é salita a ≥ 110 (nmoli/L, unitá di misura che non esprimiamo per semplicitá).

Svolgimento

Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioé a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), \quad (21\,h, 150\,nmoli/L) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (6, 70), \quad (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 21}{6 - 21} = \frac{y - 150}{70 - 150}$$

$$\frac{t - 21}{-15} = \frac{y - 150}{-80} \qquad \Big/ \cdot (-1) \cdot 15 \cdot 80$$

$$80\,(t - 21) = 15\,(y - 150)$$

$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$

$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$

$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioé a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioé 13 ore e mezza, cioé alle

$$\boxed{13\!:\!30}$$

2 – CALCOLO INFINITESIMALE

A $\circ$ $^{\%}$ Supponiamo che in determinate condizioni la percentuale di una certa sostanza che si decompone abbia legge

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{2\,\mathrm{e}^t + 1} \cdot 100\%$$

essendo t il tempo (espresso adimensionalmente e cioé senza unitá di misura). Quale percentuale si decompone al limite per t che tende all'infinito?

Svolgimento

Osservato che il tempo t che tende all'infinito é da intendersi matematicamente nel senso $t \to +\infty$, e tralasciando per un momento la costante moltiplicativa 100%, che comunque é il numero 1 espresso in percentuale, dobbiamo calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{2\,\mathrm{e}^t + 1}$$

che é della forma $\frac{\infty}{\infty}$ e si calcola subito con la Regola di De L'Hospital ($D\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t$)

$$=^H \lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{2\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{2}$$

e in definitiva, riconsiderando le percentuali, in pratica moltiplicando per 100,

$$\boxed{50\%}$$

(Osserviamo che il limite si poteva calcolare anche senza la Regola di De L'Hospital semplicemente dividendo numeratore e denominatore per e^t

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{2\,\mathrm{e}^t + 1} \cdot 100\% = \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^t}}{2 + \frac{1}{\mathrm{e}^t}} \cdot 100\% \to \frac{1-0}{2+0} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\%$$

perché per $t \to +\infty$ é $\mathrm{e}^t \to +\infty$ e allora $\frac{1}{\mathrm{e}^t} \to 0$).

Anche se non serve per rispondere al quesito, diamo un (disegno del) grafico di $g(t)$, in una forma molto approssimativa, per $t \geq 0$. (Cioé, a partire dall'inizio dei tempi considerati nell'esperimento, $t = 0$).

```
.............y ↑.......................
...............|.......................
...limite:  50% |-----------------------← asintoto per t → +∞
...............|...............%%%%%%
...............|.............%..........
...............|..........%............
...............|.......%...............
...............|.....%.................
...............|...%...................
...............|..%......................
...............|%.......................
---------------%----------------------→ t
...............|.......................
```

B • ∗ Un certo ormone abbia nel sangue di un qualche animale concentrazione nei momenti x di ogni giorno (da 0 a 24, in ore, unitá di misura che omettiamo per semplicitá) espressa da

$$f(x) = \frac{82}{(x-12)^2+1}$$

(con opportuna unitá di misura che omettiamo per semplicitá). Considerando che si definisce *valore medio di una funzione* sull'intervallo $[a, b]$ il numero

$$\frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}$$

calcolare il valore medio della concentrazione durante il giorno.

Svolgimento

Dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{24} \frac{82}{(x-12)^2+1}\, dx$$

e poi lo divideremo per $b-a$ cioé 24. Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito

$$\int \frac{82}{(x-12)^2+1}\, dx = 82 \int \frac{1}{(x-12)^2+1}\, dx = (\star)$$

che si calcola ricordando la formula di integrazione per sostituzione $t := m\,x + q$

$$\int f(m\,x+q)\, dx = \frac{1}{m} \Big(\int f(t)\, dt \Big)_{t=m\,x+q} \quad \forall\, m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0$$

ora con $m = 1$ e $q = 0$ affinché $m\,t + q$ sia $t - 12$

$$(\star) = 82 \cdot \frac{1}{1} \Big(\int \frac{1}{t^2+1}\, dt \Big)_{t=1\cdot x-12} =$$

ricordando la primitiva di $\frac{1}{t^2+1}$ o equivalentemente la derivata dell'arcotangente

$$= 82\left(\Big(\arctan t\Big)_{t=1\cdot x-12} + c\right) =$$

$$= 82\ \arctan(x-12) + c$$

(l'ultimo c é 82 volte il c precedente ma ció é irrilevante) e allora

$$\int_0^{24} \frac{82}{(x-12)^2+1}\,dx = \Big[82\ \arctan\left(x-12\right)\Big]_0^{24} =$$

$$= 82\ \arctan\left(12\right) - 82\ \arctan\left(-12\right) =$$

osservato che per la disparitá dell'arcotangente $\arctan\left(-12\right) = -\arctan\left(12\right)$

$$= 164\ \arctan(12)$$

da cui dividendo per $b-a$ cioé $24-0$ ovvero 24 otteniamo il valore medio

$$\boxed{\frac{41}{6}\arctan\left(12\right)}$$

(Che numericamente vale ≈ 10.17).
Sebbene non serva assolutamente per risolvere il quesito, diamo qua un molto approssimativo (disegno del grafico) di $f(t)$ per $0 \le t \le 24$, col valore medio.

```
.....y ↑......................
.......|......................
.....82|---------%.............
.......|........%.%............
.......|.......%...%...........  Si ha un picco a mezzogiorno,
.......|.......%...%...........  e il valore minimo a mezzanotte:
.......|.......%...%...........max=82, min ≈ 0.57 = f(0) = f(24).
.......|.......%...  %...........  La campana é molto stretta e
.......|.....%.......%..........  il valore medio é ≪ del massimo.
..10.17 |...%%.........%%........
------0%%%%-6----12----18-%%%%24 → t
.......|........................
```

3 – CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

A ∘ ∗ % Supponiamo che in una certa popolazione la mutazione RX1vis si presenti con probabilitá 25% e, indipendentemente, la mutazione RS2vol con probabilitá 40%. Che probabilitá c'é che un soggetto di quella popolazione abbia la RX1vis e non abbia la RS2vol?

Svolgimento

$$P((\text{RX1vis})\, et\, (non\, \text{RS2vol})) =$$

l'avere o non avere la RS2vol é indipendente dall'avere o non avere la RX1vis

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot P(non\, \text{RS2vol}) =$$

con l'evento complementare

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot (1 - P(\text{RS2vol})) =$$

coi dati numerici

$$= 0.25 \cdot (1 - 0.4) =$$

in definitiva

$$\boxed{0.15 = 15\%}$$

B • ≈ % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	25	200
NEGATIVI	4	5500

Calcolare la predittivitá, ovvero il Valore Predittivo Positivo.

Svolgimento

Ricordando la definizione

$$\text{predittivitá} = \text{Valore Predittivo Positivo} = VVP = \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale positivi}} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ora abbiamo

$$VVP = \frac{25}{25 + 200} = \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \approx$$

$$\boxed{\approx 0.111 = 11.1\%}$$

(Notiamo che il valore é piuttosto basso nonostante la specificitá sia alta:

$$Sp = \frac{\text{veri negativi}}{\text{totale sani}} = \frac{V_-}{V_- + F_+} = \frac{5\,500}{5\,500 + 200} = \frac{5\,500}{5\,700} = \frac{55}{57} \approx 0.965 = 96.5\%$$

e questo é dovuto alla raritá della malattia nella popolazione considerata: circa una trentina di malati su poco piú di 5 700 soggetti).

4 – STATISTICA INFERENZIALE

A ○ ∗ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H vera e alternativa A, ad un certo livello α, la regione critica sia $T > 186.71$ e il calcolo dello stimatore del test dia $T = g(x_1, ..., x_n) = 215.61$. Quale delle seguenti affermazioni é vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si é sostanzialmente perso tempo
- Non é possibile rispondere perché non é specificato il livello α.

Svolgimento

Lo stimatore T vale 215.61 che $\in$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) é vera. Allora "male respingo ipotesi vera", cioé

$$\boxed{\text{si commette un errore di prima specie}}$$

(Che é il caso peggiore).

B • ∗ Si consideri un tetraedro con le facce numerate da 1 a 4, che viene lanciato 100 volte ottenendo questi risultati:

1...2...3...4

27 38 17 18 (Cioé l'1 é uscito 27 volte, eccetera).

Si faccia il test del χ^2 al livello 0.99 (ovvero al livello 0.01) per l'ipotesi che il tetraedro sia equilibrato.

Come é noto, una certa varietá di notazioni é usata nell'esprimere i quantili e quindi le tavole di essi, con un'ambiguitá fra α e $1-\alpha$; comunque, per risolvere ogni incertezza, si sappia che il quantile necessario per risolvere il problema é presente nella seguente tavola.

Tavola del chi quadrato

n	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
1	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879	9.550	10.828
2	4.605	5.991	7.824	9.210	10.597	12.429	13.816
3	6.251	7.815	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	7.779	9.488	11.668	13.277	14.860	16.924	18.467
5	9.236	11.070	13.388	15.086	16.750	18.907	20.515

Svolgimento.

Il test per la regolaritá del tetraedro (cioé sul fatto che sia equilibrato) é

$$H : (p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right) \qquad A : (p_1, p_2, p_3, p_4) \neq \left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right)$$

Il test si fa con $k = 4$ e $\alpha = 0.01$ e $1 - \alpha = 0.99$ e, come troviamo sulla tavola del χ^2 (in cui 0.01 non é presente ma 0.99 sí, senz'ambiguitá possibili)

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.99}(3) \approx 11.345$$

Ricordiamo che nel test del chi quadrato (quello basico) il rifiuto (dell'ipotesi nulla, cioé H) si ha se

$$T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) \quad \Big(\text{o con: } n \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{p}_i - p_i)^2}{p_i}\Big)$$

purché $n\,p_i \geq 5$ per tutti gli $i = 1, ..., k$. Nel nostro caso $n\,p_i = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$ che é ben maggiore di 5 e allora si puó procedere.

$$T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} = \frac{(27-25)^2}{25} + \frac{(38-25)^2}{25} + \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(18-25)^2}{25} =$$

$$= \frac{2^2 + 13^2 + 8^2 + 7^2}{25} = \frac{286}{25} = 11.44 \ > \ 11.345 \approx \chi^2_{0.99}(3)$$

e allora

$$\boxed{\text{L'ipotesi che il tetraedro sia equilibrato é respinta al livello 0.01}}$$

(Per poco).