Legenda
$*$ É richiesto il valore esatto.
$\star$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
La valutazione é complessiva ma é ovvio che gli esercizi non pesano tutti allo stesso modo. In prima approssimazione, si valuti ogni $\bullet$ due voti e mezzo. In ognuno dei 4 esercizi multipli, é previsto un ulteriore mezzo voto per chiarezza e completezza. I 30, 31 e 32 sono ammissibili alla lode.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.

SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

$\boxed{\text{RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI}}$

MATEMATICHE ELEMENTARI

A $\bullet$ $*$ Siano p, q, r tre proposizioni rispettivamente vera, falsa, vera e si consideri la $((r \wedge p) \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(p \wedge q)$. A partire da $((V \wedge V) \vee (F ... \quad =$ si svolgano di passaggio in passagio i calcoli logici trovando il valore di veritá della proposizione composta data.

B $\bullet\bullet$ $*$ Si calcoli la media geometrica delle aree dei 5 triangoli equilateri che si ottengono – conteggiando anche quello iniziale – da un triangolo equilatero di lato 1, suddividendolo in 4 triangoli equilateri congruenti.

CALCOLO INFINITESIMALE

A $\bullet$ $*$

$$D\,(3\,\pi\,x\,\mathrm{e}^{\cos x})$$

B $\bullet\bullet$ $*$

$$\int 2\,x^2\,\mathrm{e}^x\,dx$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

A $\bullet$ $*$ $\star$ $^{\%}$ Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{3}$ calcolare

$$P(X \geq 3).$$

B $\bullet\bullet$ $\star$ $^{\%}$ Per una variabile aleatoria normale standard X calcolare

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8)$$

usando questa classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\; 0 \leq x \leq 2.2 \\ 0.99 & se\; 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\; x \geq 2.6 \end{cases}$$

STATISTICA INFERENZIALE

A • $*$ Per una variabile aleatoria uniforme discreta $\mathbb{U}\{n, 2\,n\}$ si trovi lo stimatore dei momenti del parametro n.

B •• $\star$ Conoscendo la varianza 3.2 di una variabile aleatoria normale si determini l'intervallo di fiducia bilatero consueto della media al livello 95% relativamente a questo campione

-1.32 3.78 1.58 1.55 3.96 0.85 4.78 3.74 3.25 0.99

esprimendolo in entrambe le forme usuali: $a \pm b$, e anche $[u, v]$.

****

All'esame scritto non é permesso usare il telefono cellulare né alcuna strumentazione elettronica avanzata. Neppure calcolatrici programmabili, in cui si potrebbero memorizzare formule e procedimenti che invece bisogna conoscere. (Altrimenti l'esame potrebbe diventare una gara a chi meglio sa ingannare, o puó ingannare con costosi dispositivi). Bisogna invece portare una semplice calcolatrice non programmabile con le 4 operazioni (dalla somma alla divisione) e anche la radice quadrata, ma *non* logaritmi, esponenziali, media, varianza, eccetera. (Si intende che della varianza bisogna sapere la formula e capire il significato, non schiacciare un tasto). Chi sará sprovvisto di calcolatrice verrá comunque ammesso all'esame ma non é permesso passarsi calcolatrici durante l'esame, e allora conviene portarne una. Si puó portare un semplice orologio, ma, ripetiamo, non si puó usare il telefono cellulare, che deve rigorosamente restare SPENTO nello zainetto o borsa.

QUESITI, SVOLGIMENTO E SOLUZIONI

MATEMATICHE ELEMENTARI

A • $*$ Siano p, q, r tre proposizioni rispettivamente vera, falsa, vera e si consideri la $((r \wedge p) \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(p \wedge q)$. A partire da $((V \wedge V) \vee (F ...\quad =$ si svolgano di passaggio in passaggio i calcoli logici trovando il valore di veritá della proposizione composta data.

Svolgimento.
$((V \wedge V) \vee (F \wedge V)) \wedge \neg(V \wedge F)$
$(V \vee F) \wedge \neg F$
$V \wedge V$

$$\boxed{V}$$

B •• $*$ Si calcoli la media geometrica delle aree dei 5 triangoli equilateri che si ottengono – conteggiando anche quello iniziale – da un triangolo equilatero di lato 1, suddividendolo in 4 triangoli equilateri congruenti.

Svolgimento. Il triangolo iniziale ha base lunga 1 e allora mezza base lunga $\frac{1}{2}$, allora per il Teorema di Pitagora altezza $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e allora area $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. I 4 triangolini hanno ciascuno area pari alla quarta parte di quel numero, cioé $\frac{\sqrt{3}}{16}$.
Allora le 5 aree (di cui faremo la media geometrica) sono

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{16} \quad \frac{\sqrt{3}}{16} \quad \frac{\sqrt{3}}{16} \quad \frac{\sqrt{3}}{16}$$

Il loro prodotto é

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{2^{18}} = \frac{(\sqrt{3})^5}{262\,144}$$

e la radice quinta di quel numero é la media geometrica cercata:

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2^{18}}}}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{4^9}}}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{262\,144}}}$$

che – in tutte le forme – va bene come soluzione finale, ma meglio si puó esprimere, osservando che $\sqrt[5]{2^{18}} = \sqrt[5]{2^{15}\,2^3} = \sqrt[5]{2^{15}}\,\sqrt[5]{2^3} = 2^3\,\sqrt[5]{2^3} = 8\,\sqrt[5]{8}$, con

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{8\,\sqrt[5]{8}}}$$

e ancor meglio, razionalizzando, con

$$\boxed{\tfrac{1}{16}\sqrt{3}\ \sqrt[5]{4}}$$

meno bene ma comunque validamente espresso anche con

$$\boxed{\sqrt[5]{\frac{9\sqrt{3}}{2^{18}}}}$$

e

$$\boxed{\sqrt[5]{\frac{9\sqrt{3}}{4^{9}}}}$$

e

$$\boxed{\sqrt[5]{\frac{9\sqrt{3}}{262\,144}}}$$

(Numericamente é ≈ 0.143).

CALCOLO INFINITESIMALE
A • ∗

$$D\left(3\,\pi\,x\,\mathrm{e}^{\cos x}\right)$$

Svolgimento. Estraiamo la costante moltiplicativa, che si conserva,

$$D\left(3\,\pi\,x\,\mathrm{e}^{\cos x}\right) = 3\,\pi\,D\left(x\,\mathrm{e}^{\cos x}\right) =$$

applichiamo la regola di derivazione del prodotto a $x\,\mathrm{e}^{\cos x}$

$$= 3\,\pi\left((D\,x)\,\mathrm{e}^{\cos x} + x\,D\,\mathrm{e}^{\cos x}\right) =$$

la derivata di x é 1, poi abbiamo la derivata della funzione composta $\mathrm{e}^{\cos x}$

$$= 3\,\pi\left(1\cdot\mathrm{e}^{\cos x} + x\,\mathrm{e}^{\cos x}D\,\cos x\right) =$$

$$\boxed{= 3\,\pi \left(\mathrm{e}^{\cos x} - x\,\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\right) =}$$

che giá va bene come soluzione, ma meglio

$$\boxed{3\,\pi\;\mathrm{e}^{\cos x} - 3\,\pi\,x\,\mathrm{e}^{\cos x}\sin x}$$

e ancor meglio, raccogliendo i fattori comuni,

$$\boxed{3\,\pi\left(1 - x\;\sin x\right)\mathrm{e}^{\cos x}}$$

B ●● $*$

$$\int 2\,x^2\,\mathrm{e}^x\,dx$$

Svolgimento. Applichiamo la formula di integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

con $f(x) := \mathrm{e}^x$ e $g(x) := 2\,x^2$ e allora $g'(x) := 4\,x$

$$= \mathrm{e}^x 2\,x^2 - \int \mathrm{e}^{\,x} 4\,x\,dx =$$

e adesso la applichiamo di nuovo con $f(x) := \mathrm{e}^x$ e $g(x) := 4\,x$ e allora $g'(x) := 4$

$$= \mathrm{e}^x 2\,x^2 - \left(\mathrm{e}^x\,4\,x - \int \mathrm{e}^{\,x} 4\,dx\right) =$$

e calcolando l'ultimo integrale (con anche la costante d'integrazione) e aprendo la parentesi

$$= \mathrm{e}^x 2\,x^2 - \mathrm{e}^x\,4\,x + 4\,\mathrm{e}^{\,x} + c$$

molto meglio scritto d'usuale

$$\boxed{2\,x^2\,\mathrm{e}^x - 4\,x\,\mathrm{e}^x + 4\,\mathrm{e}^{\,x} + c}$$

che puó essere data come soluzione, oppure raccogliendo $2\,\mathrm{e}^x$

$$\boxed{2\,\mathrm{e}^x\,(x^2 - 2\,x + 2) + c}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

A $\bullet \ast \star$ $^{\%}$ Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{3}$ calcolare

$$P(X \geq 3).$$

Svolgimento.

$$P(X \geq 3) =$$

Con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(X < 3) =$$

la X é geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori < 3

$$= 1 - P(X = 1 \vee X = 2) =$$

la probabilitá dell'unione di eventi disgiunti é la somma delle probabilitá

$$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2)\big) =$$

e ricordando la formula della densitá considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{1-1} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9-3-2}{9}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{4}{9} \approx 0.444 = 44.4\%}$$

B $\bullet\bullet \star$ $^{\%}$ Per una variabile aleatoria normale standard X calcolare

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8)$$

usando questa classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\ 0 \leq x \leq 2.2 \\ 0.99 & se\ 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\ x \geq 2.6 \end{cases}$$

Svolgimento. É

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8) = P(X \leq 0.8) - P(X < -1.2) =$$

trattandosi di densitá continua le probabilitá con $<$ e $\leq$ sono uguali

$$= P(X \leq 0.8) - P(X \leq -1.2) =$$

per definizione di $\Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \Phi(-1.2) =$$

e con la forumla di simmetria $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \big(1 - \Phi(1.2)\big) =$$

$$= \Phi(0.8) - 1 + \Phi(1.2) =$$

e con l'approssimazione data

$$\approx \frac{0.8\,(4.4 - 0.8)}{10} + 0.5 - 1 + \Big(\frac{1.2\,(4.4 - 1.2)}{10} + 0.5\Big) =$$

$$= 0.788 - 1 + 0.884$$

e in definitiva (recuperando il simbolo $\approx$ da piú sopra)

$$\boxed{\approx 0.672 = 67.2\%}$$

STATISTICA INFERENZIALE

A $\bullet$ $*$ Per una variabile aleatoria uniforme discreta $\mathbb{U}\{n, 2\,n\}$ si trovi lo stimatore dei momenti del parametro n.

Svolgimento.

Per una variabile aleatoria uniforme discreta $\mathbb{U}\{a, 2\,b\}$ notoriamente $E(X) = \frac{a+b}{2}$ e allora nel caso considerato $E(X) = \frac{n+2\,n}{2}$ cioé

$$E(X) = \frac{3}{2}\,n$$

e uguagliandolo allo stimatore non distorto della media $\bar{X}_m = \frac{1}{m}(X_1 + . + + X_m)$ (il nome di variabile n é giá stato impegnato per il parametro incognito e allora ovviamente dobbiamo chiamare m o comunque non n il numero di dati)

$$\bar{X}_m =^{EQ} \frac{3}{2}\,n$$

e risolvendo l'equazione si trova

$$n = \frac{2}{3}\,\bar{X}_m$$

da cui lo stimatore dei momenti cercato

$$\boxed{\hat{n} = \tfrac{2}{3\,m}\,(X_1 + ... + X_m)}$$

B ●● ⋆ Conoscendo la varianza 3.2 di una variabile aleatoria normale si determini l'intervallo di fiducia bilatero consueto della media al livello 95% relativamente a questo campione

-1.32 3.78 1.58 1.55 3.96 0.85 4.78 3.74 3.25 0.99

esprimendolo in entrambe le forme usuali: $a \pm b$, e anche $[u, v]$.

Svolgimento.

La media degli $n = 10$ dati é 2.316.

Consideriamo la classica formula dell'intervallo di fiducia al 95% ovvero 5%

$$\mu = \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

per la quale ora troviamo $2.316 \pm 1.96\,\frac{\sqrt{3.2}}{\sqrt{10}}$ e a conti fatti

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.316 \pm 1.109 \quad (\alpha = 0.05) \\[1ex] \mu \in \big[1.207, 3.425\big] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

ovvero, con sole 3 cifre significative come nei dati originali,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.32 \pm 1.11 \quad (\alpha = 0.05) \\[1ex] \mu \in \big[1.21, 3.42\big] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

(Si potrebbe obiettare che un corretto arrotondamento a 3 cifre significative di 3.425 é 3.43 e non 3.42; questo é vero ma il 3.425 era giá esso stesso un arrotondamento, di 3.4247..., e arrotondando a 3 cifre significative quest'ultimo, che é il vero valore, si ottiene appunto 3.42).

(I valori erano stati ottenuti simulando $N(2.4, 3.2)$).