Questo foglio si deve riconsegnare
piegato in 2 a raccogliere tutti i fogli di bella copia.
Questo testo deve essere costituito da un foglio
stampato fronte-retro con 6 quesiti in tutto.
Se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

○ **Sí, segno con una X questo circoletto perché sono uno studente di anni passati e desidero anche un esame orale.**

La valutazione é complessiva.
Tutti i quesiti valgono ugualmente.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.
SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

Legenda
$*$ É richiesto il valore esatto. Puó anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
% É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

MATEMATICHE ELEMENTARI

ES. 1$_{\mu 2018}$

$*$ Una certa condizione patologica X, é diagnosticata se:
c'è il sintomo A
e
c'è il sintomo B oppure il sintomo C
oppure
c'è il sintomo D ma non il sintomo A.
Cioè, indicando la negazione con la tilde, con ovvio significato dei simboli,

$$(a \wedge (b \vee c)) \vee (d \wedge \tilde{a}).$$

Indicando con V e F il *vero* e il $falso$, si conduca di passaggio in passaggio il calcolo relativo ad un paziente che ha i soli sintomi A, C, D, concludendo la diagnosi.

SVOLGIMENTO

Si ha

sintomo A presente: a é vera, V
sintomo B non presente: b é falsa, F
sintomo C presente: c é vera, V
sintomo D presente: d é vera, V

e si calcola

$$(V \wedge (F \vee V)) \vee (V \wedge \tilde{V})$$

$$(V \wedge V) \vee (V \wedge F)$$

$$V \vee F$$

$$V$$

e in conclusione

$$\boxed{\text{La condizione patologica } X \text{ è presente}}$$

ES. 2$_{\mu 2018}$

$*\approx$ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2+10} + \log_{10} \frac{x^2+10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perchè per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).

Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10} \Big(\frac{x^2}{x^2+10} \cdot \frac{x^2+10}{10^2} \Big) = 1$$

e semplificando

$$\log_{10}\frac{x^2}{10^2}=1 \quad \Big/\, 10^\wedge \qquad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2}=10^1 \quad \Big/ \cdot 10^2$$

$$x^2=10^2\cdot 10^1$$

$$x=\pm\sqrt{10^2\cdot 10}=\pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x\neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

$$\boxed{x=\pm 10\sqrt{10}\approx\pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x=\pm 10\sqrt{10}\approx\pm 31.62}$$

CALCOLO INFINITESIMALE

ES. 3$_{\mu 2018}$

$*$ Calcolare

$$\int\frac{6+x^5}{3\,x}\,dx$$

SVOLGIMENTO

Per banali calcoli algebrici, indipendenti dagli integrali,

$$\int\frac{6+x^5}{3\,x}\,dx=\int\Big(\frac{6}{3\,x}+\frac{x^5}{3\,x}\Big)\,dx=\int\Big(2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot x^4\Big)\,dx=$$

per le proprietà degli integrali (linearità)

$$=2\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{3}\int x^4\,dx=$$

e ricordando le primitive elementari, di $\frac{1}{x}$ e di x^α,

$$=2\,\ln|x|+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{5}+c$$

$$\boxed{2\ \ln|x| + \tfrac{1}{15}\, x^5 + c}$$

o anche, osservando che $2\ \ln|x| = \ln|x|^2$ e che $|x|^2 = x^2$,

$$\boxed{\ln x^2 + \tfrac{x^5}{15} + c}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

ES. 4$_{\mu 2018}$

$* \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari?

SVOLGIMENTO

Dei 36 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07
03 04 05 06 07 08
04 05 06 07 08 09
05 06 07 08 09 10
06 07 08 09 10 11
07 08 09 10 11 12
```

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3 5, 7, 11) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12) rispettivamente

```
P P n P n P
P n P n P n
n P n P n n
P n P n n n
n P n n n P
P n n n P n
```
avendosi così 15 casi favorevoli su 36 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

e in definitiva

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.417 = 41.7\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.4167 = 41.67\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ES. 5$_{\mu 2018}$

$*$ Si scriva la densità del chi quadrato a 4 gradi di libertà.

SVOLGIMENTO

Ricordando la formula della densità del chi quadrato a n gradi di libertà

$$f(x;n) := \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & se\ x > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

ora con $n = 4$ ci ritroviamo

$$\frac{1}{2^{\frac{4}{2}}\Gamma(\frac{4}{2})}\, x^{\frac{4}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^2\Gamma(2)}\, x^{2-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\Gamma(2)}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = (\star)$$

ricordando che per m intero $\Gamma(m) = (m-1)!$, ora $\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$

$$(\star) = \frac{1}{4}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

e in conclusione

$$\boxed{f(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \textit{se } x > 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}}$$

(O anche $f(x; 4)$ invece di $f(x)$, indicando esplicitamente il valore di n).
NOTA. Questo era un quesito lasciato da svolgere su *Le 64 Pillole*.

STATISTICA INFERENZIALE

ES. 6$_{\mu 2018}$

$*$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H, e alternativa A, al livello di significatività 0.001, la regione critica sia $T > 0.346$ e il calcolo dello stimatore del test dia $T = g(x_1, ..., x_n) = 0.83$. Se A è vera, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- È un ottimo risultato
- Si commette un errore di prima specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Si commette un errore di seconda specie
- Non ha molto senso perchè in statistica il livello di confidenza si vuole molto maggiore di 0.5 ovvero 50%, sperabilmente (al solito) > 95%.

SVOLGIMENTO

Lo stimatore cade nella regione critica, perchè $0.83 > 0.346$, e allora l'ipotesi viene respinta, ed essa è falsa perchè l'alternativa è vera. Siamo nel caso "bene respingo ipotesi falsa" che, come è ben noto, per i test statistici, è il caso in generale sperato. E poichè ciò è stato ottenuto col piccolo valore $\alpha = 0.001$, cioè 0.1%,

$$\boxed{\text{È un ottimo risultato}}$$