Questo foglio si deve riconsegnare piegato in 2
a raccogliere tutti i fogli di bella copia, non piegati.
Questo testo deve essere costituito da un foglio
stampato fronte-retro con 6 quesiti in tutto.
Se manca qualcosa chiedere un'altra copia.
$\circ$ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente**
di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale.
La valutazione è complessiva. Tutti i quesiti valgono ugualmente.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.
SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

ES. 1$_{\mu 2018}$
$\approx$ Troviamo che secondo una certa ipotesi la statura (altezza) normale del bambino rispetto al valore alla nascita sarebbe:
a 1 anno: 50% in più
a 4 anni: raddoppiata
a 12 anni: triplicata.
Ipotizzando un'interpolazione lineare (retta) quale sarebbe l'altezza normale a 7 anni?

SVOLGIMENTO
(Quello che cerchiamo, per i 7 anni, è qualcosa di intermedio fra il "raddoppiata" dei 4 anni, e il "triplicata" dei 12 anni, come per esempio "moltiplicata per 2.3").

Sebbene per statura e tempo ogni simbolo vada bene in linea teorica, in pratica è meglio scegliere simboli che, durate tutto lo svolgimento, ci ricordino in qualche modo a cosa corrispondono. Statura e tempo, li denoteremo con s e t rispettivamente, ma anche y per la statura e x per il tempo andrebbero bene, cercando di fatto una retta

$$y = m\,x + q \quad \text{con la formula} \quad \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

oppure (e faremo proprio così)

$$s = m\,t + q \quad \text{con la formula} \quad \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{s - s_2}{s_1 - s_2}, \text{ analoga}$$

(mentre denotare con y il tempo e con x la statura sarebbe alquanto confondente, portandoci a cercare una retta dell'inusuale forma $x = m\,y + q$).

La statura alla nascita potremmo ragionevolmente denotarla con

$$s_0, h_0, c_0, c, a... \quad \text{meno saggiamente } \alpha, \theta...$$

e scegliamo il primo simbolo, s_0.

Abbiamo
a 0 anni: s_0
a 1 anno: $s_0 + s_0 \cdot 50\%$ cioè $s_0 + 0.5\,s_0$ cioè $1.5\,s_0$
a 4 anni: $2\,s_0$
a 12 anni: $3\,s_0$
ovvero i 4 punti ricavabili dalla tabella

t	s
0	s_0
1	$1.5\,s_0$
4	$2\,s_0$
12	$3\,s_0$

nel piano cartesiano Ots del tempo t (in anni) e della statura s (in qualunque unità di misura).

Il valore 7 sta fra 4 e 12, e allora dobbiamo occuparci solo delle ultime 2 righe della tabella.

Per i 4 e i 12 anni abbiamo i 2 punti $(4, 2\,s_0)$ e $(12, 3\,s_0)$. Con la formula sopra riportata, la retta per essi è

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{s - s_2}{s_1 - s_2}$$

$$\frac{t - 12}{4 - 12} = \frac{s - 3\,s_0}{2\,s_0 - 3\,s_0}$$

$$\frac{t - 12}{-8} = \frac{s - 3\,s_0}{-\,s_0} \qquad \Big/ \cdot (-8) \cdot (-s_0)$$

$$-s_0\,t + 12\,s_0 = -8\,s + 24\,s_0$$

$$8\,s = s_0\,t + 12\,s_0$$

$$s = \frac{s_0}{8}\,t + \frac{3}{2}\,s_0 \quad \text{(della forma } s = m\,t + q\text{)}$$

che dà la statura s in funzione dell'età t e del parametro s_0 fra 4 e 12 anni (interpolata linearmente e cioè con una retta) e a 7 anni cioè per $t := 7$ si ha

$$[s(7)] \quad s = \frac{s_0}{8} \cdot 7 + \frac{3}{2}\,s_0 = \frac{7 + 3 \cdot 4}{8}\,s_0 = \frac{19}{8}\,s_0 = 2.375\,s_0 \approx 2.38\,s_0$$

cioè, volendola esprimere nello stesso formato del primo dato,

$$\boxed{\text{circa 138\% in più (rispetto alla nascita)}}$$

ma sarà meglio esprimerla nel formato del secondo e terzo dato

$$\boxed{\text{circa moltiplicata per 2.38}}$$

e ancora meglio, per una agevole pratica nel mondo reale,

$$\boxed{\text{circa moltiplicata per 2.4}}$$

(Nel senso di: "circa [quella iniziale] moltiplicata per 2.4").

Nota. Abbiamo usato solo i valori per 4 e 12 anni con un'interpolazione lineare, cioè una retta. Potremmo fare una cosa più fine e verosimilmente più realistica, con un'interpolazione quadratica: cercare cioè una parabola

che passi per gli ultimi 3 punti: $(1, 1.5\, s_0)$, $(4, 2\, s_0)$ e $(12, 3\, s_0)$. Il calcolo è molto più complesso, e certamente non darà un risultato molto diverso dal precedente, perchè, come vediamo da un buon disegno, i 3 punti sono quasi allineati. Per fare il disegno si usi s_0 come unità di misura sull'asse delle ordinate – ovvero, come altri dicono, lo si ponga uguale a 1.
Online su WolframAlpha: link->

ES. 2$_{\mu 2018}$
% Cadaveri o carcasse vecchi di centinaia o migliaia di anni possono essere datati – cosa della massima importanza in *paleomedicina* – perchè in essi la concentrazione $c(t)$ del ^{14}C si attenua con legge

$$c(t) := c_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{emivita}\, t}, \quad c_0 := c(0) \text{ concentrazione iniziale}$$

(del tutto analoga a quella di certi inquinanti nelle ossa di un vivente) e come concentrazione iniziale (di ^{14}C) si assume quella atmosferica attuale. Altri Autori scrivono la formula in modo equivalente (si veda per esempio Wikipedia italiana):

$$c(t) := c_0\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{vita\ media}}, \quad c_0 := c(0), \qquad vita\ media = \frac{emivita}{\ln 2}.$$

Per il ^{14}C l'emivita ovvero tempo di dimezzamento è 5730 anni. Calcolare la concentrazione dopo 2 865 anni espressa come percentuale di quella iniziale. (Si dia un risultato con 2 cifre significative).

SVOLGIMENTO
La seconda formulazione è interessante ma non la useremo perchè del ^{14}C ci è dato il tempo di dimezzamento e non la vita media.
Abbiamo allora l'equazione

$$c(10\,000\, anni) = c_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5\,370\, anni}\, 2\,865\, anni} =$$

semplificando

$$= c_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}} =$$

proprietà delle potenze

$$= c_0 \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

semplificando esponenziale e logaritmo

$$= c_0\, 2^{-\frac{1}{2}} =$$

proprietà delle potenze

$$= c_0 \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} =$$

proprietà delle potenze e delle radici

$$= \frac{c_0}{\sqrt{2}}$$

cioè $c_0/\sqrt{2}$ è la concentrazione dopo 2 865 anni. (È ridotta di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto a quella iniziale).
Adesso la esprimiamo come percentuale della concentrazione iniziale c_0:

$$\frac{c_0/\sqrt{2}}{c_0} \cdot 100\% = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 100\% \approx 0.707 \cdot 100\% \approx$$

$$\boxed{\approx 71\%}$$

(La ricerca della percentuale si poteva vederla anche come una proporzione: $\frac{c_0}{\sqrt{2}} : c_0 = x : 100$ oppure equivalentemente $\frac{c_0}{\sqrt{2}} : c_0 = y\% : 100\%$).

Grafico online su WolframAlpha, con $c_0 = 1$, il che è certamente vero con qualche unità di misura *ad hoc*: `link->`. Si osservi il dimezzamento in 5 370, e la riduzione al 71% presso 2 865.

ES. 3$_{\mu 2018}$
$*$ $\approx$ Questa funzione modellizzi il crescere di un parametro u nel tempo t, adimensionale:

$$u(t) := (t + 0.5)^2 - (t - 0.5)^3 \qquad 0 \leq t \leq 1.5.$$

Trovare l'istante in cui la crescita è più rapida, ovvero è massima la pendenza del grafico. (Suggeriamo pure: il t in cui è massima la derivata di u).

SVOLGIMENTO

La pendenza $p(t)$ del grafico è rappresentata dalla derivata di u

$$\left[\textit{pendenza} = p(t) = \right] \quad u'(t) = 2(t + 0.5) - 3(t - 0.5)^2$$

di cui cerchiamo il massimo facendo la derivata e risolvendo la disequazione

$$\left[p'(t) = \right] \quad 2 - 6(t - 0.5) > 0$$

$$2 - 6\,t + 3 > 0$$
$$-6\,t > -5$$
$$t < \frac{5}{6}$$

da cui lo *schema formale di crescenza e decrescenza* (di $p(t)$)

$$\begin{array}{ccccc} 0 + + + + + + + & \frac{5}{6} & \text{- - - - - - -} \ 1.5 & & p'(t) \\ \nearrow & & \searrow & & \end{array}$$

e allora $t = \frac{5}{6}$ è il punto di massimo assoluto di $p(t)$ in $[0, 1.5]$, ovvero l'istante di massima pendenza del grafico di $u(t)$:

$$\boxed{\tfrac{5}{6} \approx 0.833}$$

Nota 1. Prima di derivare si potevano sviluppare il quadrato del binomio e il cubo del binomio: questo avrebbe portato allo stesso risultato, con molti più calcoli (e maggior rischio di fare errori).

Nota 2. WolframAlpha online ci dà il grafico di $u(t)$, che effettivamente pende massimamente presso 0.833: `link->`. (In più, ci dà anche la lunghezza del grafico, *arc length*, se mai ci servisse: si noti la potenza di WolframAlpha).

ES. 4$_{\mu 2018}$

$* \approx$ Per la densità

$$f(x) := \begin{cases} \frac{c}{x} & 1 \le x \le 2\,\mathrm{e} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

di una variabile aleatoria X, determinare il valore della costante c.

SVOLGIMENTO

L'integrale diella densità su $\mathbb{R}$ deve essere 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{1}^{2\,\mathrm{e}} c \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= [c\,\ln x]_1^{2\,\mathrm{e}} =$$

$$= c\,(\ln(2\,\mathrm{e}) - \ln 1) =$$
$$= c\,\ln(2\,\mathrm{e}) - 0 =$$
$$= c\,(\ln 2 + \ln \mathrm{e}) =$$
$$= c\,(\ln 2 + 1)$$

da cui l'equazione

$$1 \stackrel{EQ}{=} c\,(\ln 2 + 1)$$
$$c = \frac{1}{\ln 2 + 1}$$

e ricordando che

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343} \qquad \lg 2 \approx 0.3$$

(e naturalmente lg è il $\log_{10}$) da cui

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

e

$$c = \frac{1}{\ln 2 + 1} \approx \frac{1}{0.69 + 1} \approx$$

e infine

$$\boxed{c = \tfrac{1}{\ln 2 + 1} \approx 0.59}$$

Grafico online su WolframAlpha: `link->`

Nota. La costante $\ln 2 \approx 0.693 \approx 0.69$ viene spesso approssimata semplicemente a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci: `link->`.

ES. 5$_{\mu 2018}$
% Per una variabile aleatoria normale standard Z calcolare

$$P(Z < -2 \lor Z > 1)$$

usando i classici valori semplificati 68 e 95 (invece dei più precisi 68.3 e 95.4) e dando il risultato in percentuale, arrotondando alla parte intera.

SVOLGIMENTO
Si tratta di sommare le aree di 2 code della campana gaussiana:
coda sinistra prima di -2
coda destra dopo di 1.
Qualche disegno sicuramente aiuterà: `link->` e, molto più preciso, `link->`

$$P(Z < -2 \vee Z > 1) =$$

$$= P(Z < -2) + P(Z > 1) =$$

• la prima è una coda sinistra che pesa 0.025, metà del complemento 0.05 di 0.95 (valori approssimativi)

• la seconda è una coda destra che pesa 0.16, metà del complemento 0.32 di 0.68 (valori approssimativi),

e sommando abbiamo $\approx 0.025 + 0.16 = 0.185$ e in definitiva, arrotondando alla parte intera come richiesto

$$\boxed{\approx 18\%}$$

Nota. Un calcolo più preciso darebbe
0.0227 invece di 0.025
0.1587 invece di 0.16
e in definitiva $\approx 18.1\%$.

ES. 6$_{\mu 2018}$
$\approx$ Con il noto stimatore di massima verosimiglianza stimare il parametro λ di una densità esponenziale da questo campione:
0.163 0.190 0.695 0.132 0.979 0.157 0.023 0.236 0.291 0.113 0.015
SVOLGIMENTO
Ricordando la formula dello stimatore di massima verosimiglianza di una densità esponenziale di parametro λ

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

(essendo $\bar{X}_n$ la media campionaria) adesso si ha, con $n = 11$,

$$\bar{X}_{11} = \frac{1}{11}(0.163 + 0.19 + 0.695 + 0.132 + 0.979 + 0.157+$$

$$+0.023 + 0.236 + 0.291 + +0.113 + 0.015) =$$

$$= \frac{2.994}{11} \approx 0.2722$$

da cui passando al reciproco

$$\boxed{\approx 3.67}$$

Nota 1. La densità esponenziale modellizza molte cose fra cui l'*intertempo* fra 2 chiamate telefoniche a una farmacia o a un qualunque servizio in un tempo del giorno in cui esse arrivano in ogni minuto con la stessa probabilità: Leggiamo sulla Wikipedia in inglese alla voce *Exponential distribution*:

> if we focus on a time interval during which the rate is roughly constant, such as from 2 to 4 p.m. during work days, the exponential distribution can be used as a good approximate model for the time until the next phone call arrives.

Nota 2. I dati erano stati simulati con $\lambda = 3.5$, con l'istruzione wxMaxima

```
for i:1 while i<=11 do
 print(0.001*floor(1000*(-(1/3.5)*log(1-random(1.0)))));
```

Eccone un'altro po' online su WolframAlpha: `link->`