

◦ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna solo questo foglio: col nome e una grande R.

Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

Ci devono essere 6 quesiti: se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

Sulle riviste scientifiche internazionali di Farmacia in lingua inglese prevale l'uso del PUNTO DECIMALE. Ma la *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano fissa l'uso della VIRGOLA DECIMALE nelle prescrizioni mediche, e inoltre scrive di “usare il punto per separare i tre zeri delle migliaia [...] 1.000 unità”. Tenendo poi conto dell'ulteriore problematicità di calcolatrici e display di macchine diagnostiche e medicali, SI DOVRÀ IN OGNI CASO FARE LA MASSIMA ATTENZIONE al riguardo. **In questo tema d'esame si usano entrambi gli standard: del punto decimale e della virgola decimale.** Altri usano il punto a mezza altezza · con significati di cui qua non ci occupiamo.

Legenda

* è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

ES. 1

\approx Si consideri una pillola ipotetica ma comunque di apparenza alquanto normale – non viene qua seguito alcuno standard legale o industriale – il cui volume interno abbia la forma di un cilindro di diametro 0,4 cm e lunghezza 1,2 cm completato con due semisfere.

Calcolatone il volume, lo si riduca di $\frac{1}{4}$.

Si ricordi che cilindri e prismi hanno volume $area\ di\ base \times altezza$ qualunque forma abbia la base.

SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che nel testo viene dapprima chiamata *lunghezza*

del cilindro quella che di solito in geometria elementare, e in particolare nella formula, viene chiamata *altezza* del cilindro: abituiamoci a tale ambiguità. Ricordiamo la formule dell'area del cerchio e del volume della sfera in funzione dei raggi:

$$\pi r^2 \quad \frac{4}{3} \pi r^3$$

La base del cilindro è un cerchio di raggio pari alla metà del diametro

$$r = 0,2 \text{ cm}$$

e quello è anche il raggio delle semisfere.

Avendosi 2 semisfere, calcoleremo il volume di 1 sfera e lo sommeremo al volume del cilindro, la cui area di base è πr^2 , facendo i calcoli dapprima senza unità di misura:

$$\begin{aligned} V_{sfera \text{ unione delle 2 semisfere}} + V_{cilindro} &= \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h = \\ &\approx \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,2^3 + 3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 1,2 \approx 0,184213 \end{aligned}$$

che ora riduciamo di $\frac{1}{4}$, come richiesto, con la formula $x \mapsto x - \frac{1}{4}x$ (da tenere ben distinta dalla $x \mapsto \frac{1}{4}x$ corrispondente a “ridurre a $\frac{1}{4}$ ”)

$$\approx 0,184213 - \frac{0,184213}{4} \approx 0,13816$$

e con ragionevole approssimazione

0,138 cm ³

(Si tratta di 138 mm³, molto approssimativamente $\frac{1}{7}$ di centimetro cubo ovvero millilitro).

NOTA. Le scritte frazionarie come $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{7}$ vengono escluse dalla *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano:

evitare l'uso delle frazioni (ad esempio, $\frac{1}{2}$ compressa ovvero "metà compressa" pu essere frainteso con 1 o 2 compresse) e sostituire, ove possibile, il farmaco con altra forma farmaceutica avente il dosaggio necessario

ma esse continueranno a trovarsi in un'infinità di testi, anche di Farmacia.

ES. 2 Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto "*concentrazione degli H^+* ", ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.

A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come "circa dimezzare y " o "circa decuplicare y " o analoghi.

SVOLGIMENTO

$$-\log_{10} y - 0,5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0,5} =$$

e osservando che $0,5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} \sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\left(\log_{10} y + \log_{10} \sqrt{10}\right) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10} \left(y \cdot \sqrt{10}\right)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3,16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

corrisponde a circa triplicare y

Nota. Se il pH aumenta di 1 allora y aumenta di 1 ordine di grandezza ovvero decuplica. Se il pH aumenta di $0,5 = \frac{1}{2}$ allora y aumenta di “mezzo ordine di grandezza” ovvero si moltiplica per $\sqrt{10} \approx 3,16$, ovvero molto approssimativamente triplica. (Si noti che triplicare 2 volte equivale a moltiplicare per 9 ovvero, molto approssimativamente, decuplicare).

Da qua in poi si usi lo standard del punto decimale

ES. 3

* Calcolare il minimo di $x - 3 \ln x$.

(Per x sufficientemente grande, diciamo > 1 , da intendersi come tempo, questa funzione modella una grandezza che cresce proporzionalmente al tempo salvo una diminuzione sempre più grande in termini assoluti ma sempre più piccola in termini relativi ovvero percentuali; ma tutto ciò non serve per risolvere il quesito).

SVOLGIMENTO

Deve essere $x > 0$ essendo x argomento del logaritmo. Si deriva ottenendo

$$1 - \frac{3}{x} \quad x > 0$$

e si risolve per $x > 0$ la disequazione

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{x} &> 0 \\ \frac{x-3}{x} &> 0 / \cdot x > 0 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

che dà la decrescenza per $0 < x < 3$ e la crescita per $x > 3$, e allora $x = 3$ è un punto di minimo relativo e assoluto, e il minimo della funzione si ottiene calcolando la funzione stessa in $x = 3$:

$$3 - 3 \ln 3.$$

(Numericamente ≈ -0.3).

ES. 4

% Si supponga che in una popolazione

il 18% degli individui non ha il gene G1
 il 15% degli individui non ha il gene G2
 e si considerino indipendenti i 2 eventi in ogni individuo.
 Che probabilità ha un individuo qualunque di avere almeno uno dei geni?
 Si dia il risultato in percentuale con 2 cifre significative

SVOLGIMENTO

Naturalmente useremo la concezione frequentista della probabilità, cioè intendiamo “il 18% di una popolazione non ha il gene G1” come

$P(\text{un individuo scelto a caso non ha il gene G1}) = 18\%$, e similmente

$P(\text{un individuo scelto a caso non ha il gene G2}) = 15\%$.

Allora

$$\begin{aligned}
 P(\text{almeno 1 gene}) &= \quad \text{con l'evento complementare} \\
 &= 1 - P(\text{nessun gene}) = \quad \text{evento composto} \\
 &= 1 - P((\text{non ha G1}) \text{ et } (\text{non ha G2})) = \quad \text{eventi indipendenti} \\
 &= 1 - P(\text{non ha G1})P(\text{non ha G2}) = \quad \text{valori} \\
 &= 1 - 0.18 \cdot 0.15 = 0.973 = 97.3\%
 \end{aligned}$$

e approssimando con 2 cifre significative come richiesto

97%

ES. 5

≈ % Un certo parametro fisiologico sia (approssimativamente, ovvio) variabile aleatoria U normale con media 70 e varianza 16 (numeri puri, oppure anche con opportune unità di misura qua omesse per semplicità). (Le possibili realizzazioni nelle Scienze Applicate sono molteplici). Si consideri la variabile aleatoria $Z := \frac{U-70}{4}$. Che probabilità c'è che $5Z > -9.8$?

SVOLGIMENTO

Essendo $\mu = 70$ e $\sigma^2 = 16$ e $\sigma = 4$, la $Z = \frac{U-\mu}{\sigma}$ è variabile aleatoria normale standard (standardizzazione di X normale).

Naturalmente $5Z > -9.8$ equivale a $Z > -1.96$, e allora

$$\begin{aligned}
 P(2Z > -3.92) &= P(Z > -1.96) = \\
 \text{evento complementare} &= 1 - P(Z \leq -1.96) =
 \end{aligned}$$

essendo Z variabile aleatoria normale standard

$$= 1 - \phi(-1.96) =$$

per la formula di simmetria $\phi(1 - x) = 1 - \phi(x)$

$$= 1 - (1 - \phi(1.96)) = \phi(1.96) \approx$$

e infine ricordando il valore classico

$$\approx 0.975 = 97.5\%$$

(È stato facile risolvere il quesito perchè si è presentato il valore $\phi(1.96)$ che si sa a memoria; se l'argomento x di ϕ fosse stato diverso da 1.96 il problema si poteva risolvere con le tavole dei quantili normali, oppure online su WolframAlpha con l'istruzione `CDF[NormalDistribution[0,1],valore di x]` o con vari software come per esempio wxMaxima (gratuito) o Mathematica^(R), o anche con calcolatrici particolarmente avanzate).

ES. 6

* Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A , ad un certo livello α , la regione critica sia definita da $t \geq 7.78$ e lo stimatore $g(X_1, \dots, X_n)$ relativo al test abbia prodotto il valore 4.512, e che sia vera A . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie
- Era il caso in generale sperato
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non è possibile rispondere perchè non è specificato il quantile

SVOLGIMENTO

(Prima di tutto stabiliamo che i numeri sono stati riportati con la convenzione del punto decimale, perchè se 4.512 ci lascia nel dubbio – circa 4 e mezzo, o circa quattomilacinquecento – esso viene risolto vedendo 7.78).

Lo stimatore T vale 4.512 che \notin alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) è falsa (perchè è vera l'alternativa). Allora “male non respingo ipotesi falsa”, cioè

Si commette un errore di seconda specie