Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

In questo tema d'esame si usano entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. Attenzione!

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Nel primo esercizio **specificare** se viene usato lo standard del punto o della virgola decimale e risolvere con lo stesso standard.

ES. 1$_{\mu 2020}$
$*$ Supponiamo che una circolare ministeriale imponga alle farmacie di fare una segnalazione se si presenta un cliente
con tosse
febbre fra 38°C e 39°C
è stato in Mizistan nelle ultimi 2 settimane
oppure
con tosse
febbre fra 39,1°C e 40°C
è stato in Mizistan nelle ultime 4 settimane
oppure
febbre oltre 39,5°C
col *sintomo terribile*.
Con ovvio significato dei simboli, ciò è espresso da 1 delle seguenti espressioni:

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (f \vee g)$$

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (d \vee g)$$

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge d \wedge e) \vee (f \wedge g)$$

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge d \wedge e) \vee (d \wedge g)$$

Trovata l'espressione giusta, si conduca il calcolo con V e F fino alla determinazione dell'obbligo o meno di segnalazione, per un cliente che si presenta con tosse, *sintomo terribile*, lasciato il Mizistan 3 settimane fa, febbre a 40,2°C.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale, come nel testo del quesito. Ovviamente l'espressione giusta, che esprime la casistica data, è la terza

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge d \wedge e) \vee (f \wedge g) =$$

che per il soggetto considerato, in termini di *vero* e *falso*, vale

$$= (V \wedge F \wedge F) \vee (V \wedge F \wedge V) \vee (V \wedge V) =$$

$$= F \vee F \vee V =$$

$$= V$$

$$\boxed{\text{la segnalazione deve essere fatta}}$$

$$\boxed{\text{Nei seguenti 2 esercizi usare lo standard della virgola decimale}}$$

ES. 2$_{\mu 2020}$

$*\approx$ Risolvere l'equazione

$$\mathrm{e}^{2\,x^3} - \mathrm{e}^{2\ \lg^6(2\lg 100)} = 0$$

SVOLGIMENTO

Ovviamente $\lg 100 = 2$

$$\mathrm{e}^{2\,x^3} = \mathrm{e}^{2\ \lg^6(2\cdot 2)} \quad \Big/ \ \ln$$

$$2\,x^3 = 2\ \lg^6 4 \quad \Big/ \ :2$$

$$x^3 = \lg^6 4 \quad \Big/ \sqrt[3]{\cdot}$$

$$x = \lg^2 4 =$$

che è la soluzione esatta, e infine con le proprietà dei logaritmi e la nota approssimazione $\lg 2 \approx 0{,}3$

$$= \lg^2 2^2 = (\lg 2^2)^2 = (2\ \lg 2)^2 \approx (2 \cdot 0{,}3)^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$$

$$\boxed{\lg^2 4 \approx 0{,}36}$$

(Un valore più preciso è 0,3625, come si può verificare per esempio online su WolframAlpha con `Log[10,4]^2`).

ES. 3$_{\mu 2020}$

$*$ La concentrazione sanguigna di un farmaco dall'istante 0 in cui viene assunto *per os* (una volta) sia modellizzata, in via molto semplificata, da

$$f(t) := \begin{cases} t\,(2 - t/4) & \textit{se } 0 \le t \le 5 \\ 7\,\mathrm{e}^{-t/8} & \textit{se } t > 5 \end{cases}$$

(essendo t il tempo espresso in unità adimensionali).
(Questa funzione, nulla in 0, prima cresce fino a $t = 4$ e poi decresce, restando positiva; in 5 ha un minuscolo *salto* di $\approx -0{,}003$, di cui non ci occuperemo). Trovare l'AUC$_{0-16}$, *area under the curve* da 0 a 16. (L'unità di misura di $f(t)$ potrebbe essere millimoli al decilitro o altra, ma non ce ne occuperemo).

SVOLGIMENTO

L'*area under the curve*, è l'integrale definito della funzione non negativa considerata, che "spezziamo" in 2 parti (con l'additività sul dominio, o, se vogliamo, con la Formula di Chasles), da 0 a 5 e da 5 a 16:

$$\mathrm{AUC}_{0-16} = \int_0^{16} f(t)\,dt = \int_0^5 (2\,t - t^2/4))\,dt + \int_5^{16} 7\,\mathrm{e}^{-t/8}\,dt =$$

$$= \left[t^2 - \frac{t^3}{12}\right]_0^5 + \left[-56\,\mathrm{e}^{-t/8}\right]_5^{16} =$$

$$= 25 - \frac{125}{12} - 0 + 0 - 56\,\mathrm{e}^{-16/8} + 56\,\mathrm{e}^{-5/8} =$$

$$= \frac{25 \cdot 12 - 125}{12} - 56\,\mathrm{e}^{-2} + 56\,\mathrm{e}^{-5/8} =$$

$$\boxed{\tfrac{175}{12} - 56\,\mathrm{e}^{-2} + 56\,\mathrm{e}^{-5/8}}$$

(Che numericamente vale ≈ 37).
Leggiamo su Wikipedia[1] (in italiano), l'enciclopedia libera, alla voce *Area Under the Curve*:

> L'area sotto la curva concentrazione/tempo o AUC (dalla dicitura inglese area under the time/concentration curve, ovvero area sottesa alla curva) è un parametro farmacocinetico dato dall'integrale in un grafico concentrazione/tempo (...) L'AUC (da zero a infinito) rappresenta l'esposizione totale al farmaco in funzione del tempo. (...) Per indicare l'AUC riferita ad un particolare intervallo temporale si utilizzano i pedici, ad esempio AUC_{4-8h} indica l'area sotto la curva nell'intervallo di tempo che va da 4 a 8 ore.

Osserviamo ancora che, pur nell'estrema semplicità del modello analitico scelto, cioè della funzione usata, il grafico è in qualche modo *ragionevole*, con una certa verosimiglianza rispetto a una situazione realistica, come vediamo confrontando il grafico su Wikipedia (nella pagina sopra linkata) col grafico della nostra funzione, per esempio online su Wolframalpha in `https://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot%5Bt%282-t%2F4%29HeavisideTheta%5B5-t%5D%2B7Exp%5B-t%2F8%5DHeavisideTheta%5Bt-5%5D%2C%7Bt%2C0%2C16%7D%5D`

Nei seguenti 3 esercizi usare lo standard del punto decimale

ES. 4$_{\mu 2020}$
% Sia
 40% la probabilità di avere il gene A
 30% la probabilità di avere il gene B
 20% la probabilità di avere il gene C.
Supponiamo del tutto indipendenti (sia a 2 a 2 che a 3 a 3) questi eventi. Qual è la probabilità di non avere alcuno dei geni?
 SVOLGIMENTO
Si ha, con gli eventi complementari,
 60% la probabilità di non avere il gene A
 70% la probabilità di non avere il gene B

[1] Letto il 3 febbraio 2020

80% la probabilità di non avere il gene C
e per l'indipendenza (che vale ovviamente anche per gli eventi complementari)

$$P(\text{non avere alcun gene}) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 = 0.336 =$$

$$\boxed{33.6\%}$$

ES. 5$_{\mu 2020}$
$*$ Considerata la densità di Student

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

calcolare da essa la densità di Student con 1 grado di libertà, cioè $n := 1$.

SVOLGIMENTO

Poniamo 1 al posto di n nell'espressione

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\sqrt{1\cdot\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{1}\right)^{-(1+1)/2} =$$

ricordando che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(1) = 0! = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}\left(1+t^2\right)^{-1}$$

e osservando che $\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \pi$, in definitiva

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}}$$

(che com'è noto è la densità di Cauchy).

ES. 6$_{\mu 2020}$
$*$ Per un gene che si presenta in 4 varianti A, B, C e D, si ipotizza nella popolazione una frequenza $3 : 5 : 10 : 12$. Testare quell'ipotesi coi dati

A: 25 B: 40, C: 55, D: 60.
I quantili significativi, con gradi di libertà n da 1 a 10, sono

$$\chi^2_{0.05}(n) : 3.84\ 5.99\ 7.81\ 9.49\ 11.07\ 12.59\ 14.07\ 15.51\ 16.92\ 18.31.$$

SVOLGIMENTO
Ricordiamo il Test del Chi Quadrato al livello (classico) 95% ovvero 5%: se

$$T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{0.05}(k-1) \qquad \mathit{con}\; n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k$$

si rifiuta l'ipotesi nulla della densità

$$H : (p_1, ..., p_k)\,.$$

Ora $3 : 5 : 10 : 12$ corrisponde, in trentesimi perchè $3 + 5 + 10 + 12 = 30$, a

$$H : (p_1, ..., p_k) = \left(\frac{3}{30}\ \frac{5}{30}\ \frac{10}{30}\ \frac{12}{30} \right)$$

ovviamente con $k := 4$, ovvero semplificando

$$H : (p_1, ..., p_4) = \left(\frac{1}{10}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5} \right)$$

Essendo $k = 4$, i gradi di libertà saranno 3, cioè considereremo il quantile $\chi^2_{0.05}(3)$ che risulta 7.81.
Gli n_i ci sono dati, da $n_1 = 25$ a $n_4 = 60$, con n (totale) $25+40+55+60 = 180$.
Verifichiamo che effettivamente $n\,p_i \geq 5 \quad$ per $i = 1, ..., k$:

$$n\,p_1 = 180 \cdot \frac{1}{10} = 18 > 5 \quad \text{e gli altri } n\,p_i \text{ sono ancora più grandi.}$$

Allora si può applicare il test:

$$T_{180} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} =$$

$$= \frac{(25 - 180 \cdot \frac{3}{30})^2}{180 \cdot \frac{3}{30}} + \frac{(40 - 180 \cdot \frac{5}{30})^2}{180 \cdot \frac{5}{30}} + \frac{(55 - 180 \cdot \frac{10}{30})^2}{180 \cdot \frac{10}{30}} + \frac{(60 - 180 \cdot \frac{12}{30})^2}{180 \cdot \frac{12}{30}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(25-18)^2}{18} + \frac{(40-30)^2}{30} + \frac{(55-60)^2}{60} + \frac{(60-72)^2}{72} = \\
&= \frac{7^2}{18} + \frac{10^2}{30} + \frac{(-5)^2}{60} + \frac{(-12)^2}{72} = \\
&= \frac{49}{18} + \frac{100}{30} + \frac{25}{60} + \frac{144}{72} \approx \\
&\approx 2.722\,22 + 3.333\,33 + 0.416\,667 + 2.0 = \\
&= 8.472\,22 > 7.81 \qquad (T_{180} \text{ supera il quantile } \chi^2_{0.05}(3) \approx 7.81).
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Si respinge l'ipotesi}}$$