○ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati <u>e diverso docente</u> e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.**
Chi si ritira, consegna **<u>solo</u>** questo foglio: col nome e una grande R.
**Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.**
Ci devono essere 6 quesiti: se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

**In questo tema d'esame si usano entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. Attenzione!**

**Legenda**

$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Nel primo esercizio determinare se viene usato lo standard del punto o della virgola decimale e risolvere con lo stesso standard

**ES. 1**$_{\mu 2020}$
$\approx$ In un articolo scientifico[1] dell'European Food Safety Authority (EFSA), leggiamo sull'additivo alimentare E 570

> The EFSA Panel on Food Additives and Nutrient Sources added to Food (ANS) provides a scientific opinion re-evaluating the safety of fatty acids (E 570) when used as a food additive (...) albino rats (...) were fed (...) (equivalent to (...) 9,000 mg/kg bw per day) lauric acid in their diet (...) (Fitzhugh et al., 1960).

cioè 9,000 milligrammi di acido laurico per ogni chilogrammo di peso corporeo (al giorno). A quale quantità in milligrammi corrisponde per un ratto albino il cui peso misurato all'americana sia di un decimo di libbra? Si usi

[1] Re-evaluation of fatty acids (E 570) as a food additive, EFSA Panel on Food Additives and Nutrient Sources added to Food (ANS) (05 May 2017) Alicja Mortensen et al.

l'approssimazione 11 lb $\approx$ 5 kg. (Ha un errore relativo circa del 2 per mille, ma ora non ci interessa). Si arrotondi il risultato all'intero più vicino.

**SVOLGIMENTO**

Useremo lo standard del punto decimale.
Infatti, nell'ipotesi più verosimile che seguiremo, l'articolo scientifico internazionale usa senz'altro lo standard del punto decimale, e allora la virgola di 9,000 è semplicemente un separatore delle migliaia: si tratta cioè del numero *novemila*.
Si ha

$$11 \text{ lb} \approx 5 \text{ kg} \qquad \Big/ : 11$$

$$1 \text{ lb} \approx \frac{5}{11} \text{ kg} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10} \text{ lb} \approx \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{10} \text{ kg}$$

che è il peso dell'animale in chilogrammi. (Circa 0.045 chili cioè 45 grammi, ragionevole). Per ognuno di quei chilogrammi dobbiamo considerare i novemila milligrammi trovandosi

$$\approx \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{10} \cdot 9{,}000 \approx 409.091 \text{ mg}$$

(non 409,091 che è mille volte maggiore) nel quale risultato il punto è punto decimale. Arrotondando come richiesto

$$\boxed{\approx 409 \text{ mg}}$$

(Meno di mezzo grammo).
(Si noti che approssimando malamente $\frac{5}{11}$ con 0.45 si ottiene infine 405 invece di 409, con un errore circa dell'1% che non è molto grave ma non c'è alcun motivo di fare; è meglio approssimare con 0.4545 o ancora meglio lasciare la frazione fino al calcolo finale, dove con la calcolatrice materialmente si calcolerà `5`$\times$`9000`$\div$`110`).

Nei seguenti 2 esercizi usare lo standard della virgola decimale

**ES. 2**$_{\mu 2020}$
% Il dosaggio di particolari farmaci dipende dalla superficie corporea. Una delle formule approssimate (Formula di Mosteller) dà

$$superficie_{m^2} = \sqrt{\frac{altezza_{cm} \times peso_{kg}}{3\,600}}$$

Prendiamo per buona questa formula (senza discuterne eventuali limiti alla validità). Se un fissato individuo conservando la sua altezza raddoppia il peso, di quanto aumenterebbe la sua superficie corporea?

**SVOLGIMENTO**

$$\frac{superficie\;finale}{superficie\;iniziale} =$$

detta $h_0$ l'altezza, e $p_0$ il peso iniziale e allora $2\,p_0$ quello finale

$$= \frac{\sqrt{\frac{h_0 \cdot 2\,p_0}{3\,600}}}{\sqrt{\frac{h_0 \cdot p_0}{3\,600}}}$$

si semplifica tutto tranne $\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\boxed{\approx 41\%}$$

(Nella pratica, appare ragionevole non fare alcun affidamento sull'esattezza della cifra delle unità; diciamo piuttosto che, col modello della Formula di Mosteller, ad un raddoppio del peso conservando l'altezza corrisponde un aumento circa del 40% della superficie corporea).

**ES. 3**$_{\mu 2020}$
$\ast \approx$ La concentrazione sanguigna di un farmaco dall'istante 0 in cui viene assunto – una sola volta – sia modellizzata, in via semplificata, da

$$u(t) := 3\,c\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}$$

essendo $c$ una costante che possiamo determinare farmacologicamente e $t$ il tempo (espresso in unità adimensionali). Fissato $c = 4$ trovare il valore massimo che raggiunge la concentrazione. (L'unità di misura di $u(t)$ potrebbe essere millimoli al decilitro o altra, ma non ce ne occuperemo).

**SVOLGIMENTO**

Cerchiamo il massimo di

$$u(t) := 12\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \qquad \textit{per } t \geq 0$$

Deriviamo

$$u'(t) := 12\,\mathrm{e}^{-2\,t} - 2 \cdot 12\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} =$$

$$= 12\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,(1 - 2\,t) > 0 \quad \textit{disequazione}$$

$$\Big/ : 12\,\mathrm{e}^{-2\,t} > 0$$

$$1 - 2\,t > 0$$

$$t < \frac{1}{2}$$

cioè $u'(t) > 0$ in $[0, \frac{1}{2}]$. Allora la $u$ cresce da 0 a $\frac{1}{2}$ e poi decresce, e allora $t = \frac{1}{2}$ è unico punto di massimo relativo e assoluto.
Il massimo di $u(t)$ per $t \geq 0$ sarà

$$\max_{t \geq 0}\, u(t) = u\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 12\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,\frac{1}{2}} = \frac{6}{\mathrm{e}}$$

e ricordando il valore $\mathrm{e} \approx 2{,}718$

$$\boxed{\frac{6}{\mathrm{e}} \approx 2{,}21}$$

Nei seguenti 3 esercizi usare lo standard del punto decimale

**ES. 4**$_{\mu 2020}$

$*$ Calcolare per $x > 0$ la densità del chi quadrato a 6 gradi di libertà ricordando la

$$f_{\chi^2(n)}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \textit{se } x > 0 \\ 0 & \textit{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

**SVOLGIMENTO**

Per $n = 6$ e $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{6}{2}}\Gamma(\frac{6}{2})}\, x^{\frac{6}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^3\Gamma(3)}\, x^{3-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} =$$

ricordando che per gli interi positivi la funzione gamma dà i fattoriali e precisamente $\Gamma(x) = (x-1)!$, ora $\Gamma(3) = (3-1)! = 2! = 2$,

$$= \frac{1}{8 \cdot 2}\, x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\tfrac{1}{16}\, x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$$

**ES. 5**$_{\mu 2020}$

$*$ $^{\%}$ Calcolare

$$P(0 \le T \le 0.577\,35)$$

essendo $T$ una variabile aleatoria Cauchy. Si potrà trarre vantaggio da questa tavola di valori classici:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

**SVOLGIMENTO**

Con la calcolatrice calcoliamo approssimatamente $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\sqrt{3}$ trovando proprio $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577\,35$ e insomma siamo ricondotti a calcolare, salvo approssimazioni,

$$P\Big(0 \le T \le \frac{\sqrt{3}}{3}\Big).$$

Con la densità di Cauchy

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

si ha

$$P(0 \le T \le 0.577\,35) \approx P\Big(0 \le T \le \frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = (\star)$$

calcoliamo l'integrale indefinito, con la linearità dell'integrale

$$\int \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan t + c$$

e riprendiamo il calcolo interrotto, con l'integrale definito,

$$(\star) = \left[\frac{1}{\pi} \cdot \arctan t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\pi} \cdot \arctan 0$$

e coi noti valori classici, o con l'aiuto della tavola data,

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\pi} \cdot 0 =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{6} = 16.7\%}$$

**ES. 6**$_{\mu 2020}$ $\approx$ Stimare il parametro della distribuzione esponenziale da cui è stato tratto questo campione:

2.92 0.0504 31.895 3.37 5.074 2.66 1.288 16.1 12.04 1.75 5.84 8.31

**SVOLGIMENTO**

La media è

$$7.60812$$

e passando al reciproco in base alla formula dello stimatore di massima verosimiglianza per il parametro $\lambda$ di una distribuzione esponenziale

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

si ha la stima richiesta

$$\boxed{\approx 0.131}$$

(In effetti per generare il campione aleatorio era stato usato il valore 0.15 su WolframAlpha; si può riprovare con `random 12 sample exponential 0.15` ma naturalmente verranno in generale valori diversi).