○ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.**

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

😎 **In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.**
😎 **In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.**

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_\mu$ $*$ Calcolare $\sqrt[3]{8}$ (Solo risultato, senza passaggi).
SVOLGIMENTO
Ad abundantiam, svolgiamo qualche passaggio.
Essendo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, la radice cubica di 8 è

ESERCIZIO 0b$_\mu$ $*$ Calcolare $D\cos x$ (Solo risultato, senza passaggi).

SVOLGIMENTO

Conoscendo la derivata del coseno

$$\boxed{-\sin x}$$

ESERCIZIO 0c$_\mu$ $*$ Calcolare P(1 moneta lanciata 2 volte dà solo 1 testa) (Solo risultato, senza passaggi).

SVOLGIMENTO

Ad abundantiam, svolgiamo qualche passaggio.
Lanciando 2 volte una moneta si hanno 4 casi equiprobabili

T T
T C
C T
C C

e solo 2 (il secondo e il terzo qua sopra elencati) hanno 1 sola testa, e allora

$$p = \frac{\#casi\, favorevoli}{\#casi\, possibili} =$$

$$= \frac{2}{4} =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}$$

ovvero anche

$$\boxed{\text{0,5 (con lo standard della virgola decimale)}}$$

ESERCIZIO 1$_\mu$ $\approx$

Calcolare la media interquartile dei reciproci dei primi 16 numeri interi positivi. Si facciano i calcoli con 4 cifre decimali e si dia il risultato con 2 cifre decimali.

SVOLGIMENTO

Sarà usato lo stadard del punto decimale.

I primi 16 numeri interi positivi sono

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

e i loro reciproci sono, nell'ordine,

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$$

ovvero, disposti in ordine crescente e suddivisi in 4 "quartili",

$$\frac{1}{16}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{13}\quad \frac{1}{12}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{9}\quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\quad \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$$

che eliminati i "quartili" estremi ci lascia questi 8 numeri

$$\frac{1}{12}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{9}\quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}$$

di cui facciamo la media

$$IQM = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right) =$$

facendo i calcoli con 4 decimali

$$\approx \frac{0.0833+0.0909+0.1000+0.1111+0.1250+0.1429+0.1667+0.2000}{8} \approx$$

$$\approx 0.1275 \approx$$

$$\boxed{\approx 0.13}$$

ESERCIZIO 2$_\mu$ $\approx$

Risolvere

$$\lg \ln x^2 = 0$$

SVOLGIMENTO

Sarà usato lo stadard della virgola decimale.

$$\lg \ln x^2 = 0 \quad \Big/ 10^{\wedge}$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$\ln x^2 = 10^0$$

$$\ln x^2 = 1 \quad \Big/ \exp$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$x^2 = \mathrm{e}$$

$$x = \pm\sqrt{\mathrm{e}}$$

e ricordando che $\mathrm{e} \approx 2{,}718$

$$\boxed{\approx \pm 1{,}649}$$

Nota 1. In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perchè lg non esiste per argomenti negativi. Ma i passaggi svolti per risolvere l'esercizio iniziale, $\lg \ln x^2 = 0$, sono di quelli "sicuri", che non introducono soluzioni spurie ovvero fittizie.

Nota 2. Non è una buona idea cercare di risolvere l'equazione con la proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\; \mathrm{LOG}(x^\alpha) = \alpha\, \mathrm{LOG}(x)$$

(ove LOG indica 2 volte 1 stesso logaritmo in qualunque base) perchè essa, come si vede scritto, vale per $x > 0$, e di fatto, incautamente applicandola in questo esercizio, fa perdere la soluzione negativa. (Per x negativo la formula $\mathrm{LOG}(x^\alpha) = \alpha\, \mathrm{LOG}(x)$ non ha senso).

ESERCIZIO 3$_\mu$ $*$

$$\int_{-1}^{2} x^3\,dx$$

SVOLGIMENTO

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} =$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$\boxed{\tfrac{15}{4}}$$

Osserviamo che la soluzione può anche essere espressa (in forma esatta) anche in questo modo:

$$\boxed{\text{3.75 (con lo standard del punto decimale)}}$$

ESERCIZIO 4$_\mu$ $* \approx$

Determinare la costante incognita c della densità di questa variabile aleatoria:

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \lg 2 & \lg 2 & c \end{pmatrix}$$

SVOLGIMENTO

Sarà usato lo standard del punto decimale.

La somma delle probabilità della densità deve essere 1 e allora

$$c = 1 - (\lg 2 + \lg 2) =$$

$$= 1 - 2\,\lg 2 \approx$$

che è la soluzione esatta cercata. Poi ricordando che $\lg 2 \approx 0.3$

$$\approx 1 - 2 \cdot 0.3 =$$

$$= 1 - 0.6 = 0.4$$

$$\boxed{1 - 2\lg 2 \approx 0.4}$$

Osserviamo che per le proprietà dei logaritmi la soluzione può anche essere espressa in questo modo:

$$\boxed{1 - \lg 4 \approx 0.4}$$

ESERCIZIO 5$_\mu$ $*$

Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A, ad un certo livello α, la regione critica sia $[20.213, +\infty[$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 18.127, e che sia vera A. Quale delle seguenti affermazioni é vera?

- non è possibile rispondere percè non è specificato il test usato
- non è possibile rispondere percè non si sa se il campione è gaussiano
- non è possibile rispondere perchè non è specificato α
- Non é possibile rispondere perché non é specificato il quantile
- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si é sostanzialmente perso tempo

SVOLGIMENTO

Non è possibile sapere se viene usato lo standard del punto decimale, oppure quello della virgola decimale con punto usato come separatore delle migliaia, ma ciò non influisce sulla soluzione del quesito. (Potrebbe essere che i 2 numeri dati, 20.213 e 18.127, siano dell'ordine di 20 000, o 20).

Lo stimatore T vale 18.127 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) é falsa (perché é vera l'alternativa). Allora *"male non respingo ipotesi falsa"*, cioé

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$