○ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati <u>e diverso docente</u> e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.**

Chi si ritira, consegna <u>**solo**</u> questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$\%$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a. $*$ Calcolare il costo di un filo interdentale da € 4 scontato del 40% (ovviamente il simbolo € va preposto, e vanno dati 2 decimali, con la virgola decimale).

SVOLGIMENTO
Si userà lo standard della virgola decimale. (In questo caso è l'unico legalmente valido trattandosi della scrittura dell'euro).

Scontare del 40% è togliere il 40% o più immediatamente moltiplicare per 0.6 ottenendo $0.6 \cdot 4 = 2.4$ che trascritto nella forma legale degli euro (col simbolo dell'euro preposto, e poi con 0 decimali, oppure con la virgola e 2 decimali) è

$$\boxed{€\ 2{,}40}$$

ESERCIZIO 0b. $*$ Calcolare $D\,\mathrm{e}^x$ (Solo risultato, senza passaggi)

SVOLGIMENTO

$$\boxed{\mathrm{e}^x}$$

ESERCIZIO 0c. $*$ Calcolare P(dado dà più di 2)

SVOLGIMENTO

$$p = \frac{casi\, favorevoli}{casi\, possibili} = \frac{\#\{3,4,5,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{4}{6} =$$

$$\boxed{\tfrac{2}{3}}$$

ESERCIZIO 1. $\approx$
Risolvere

$$\sqrt[4]{256}\,\sqrt{2} - 4 \times 10^{x/\pi} = 0$$

SVOLGIMENTO
Si userà lo standard del punto decimale.

Se non sappiamo a memoria la radice quarta di 256, calcoliamo in successione
$2^4 = 16$
$3^4 = 81$
$4^4 = 256$ e allora la radice cercata è 4, oppure usiamo la classica formula

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$$

da cui, a mente o anche con la calcolatrice,

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4.$$

Allora risolveremo l'equazione

$$4\sqrt{2} - 4 \times 10^{x/\pi} = 0$$

facendo attenzione, scrivendo a mano, a non confondere i simboli $\times$ e x, a stampa molto diversi:

$$4\sqrt{2} = 4 \times 10^{x/\pi} \qquad \Big/ : 4$$

$$\sqrt{2} = 10^{x/\pi} \qquad \Big/ \lg$$

per le proprietà dei logaritmi

$$\frac{x}{\pi} = \lg\sqrt{2} = \lg 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\lg 2 \qquad \Big/ \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}\lg 2$$

e ricordando i classici $\pi \approx 3.14$ e $\lg 2 \approx 0.3$

$$\boxed{0.471}$$

ESERCIZIO 2. $*$

Nel mondo si contavano 0,5 milioni di morti nella pandemia al 30 giugno 2020, giorno 182 dell'anno, e 1 milione al 28 settembre, giorno 272. Dal grafico si vede che in quel periodo la crescita è più o meno lineare (e poi aumenta ma non ce ne occuperemo). Ipotizzato allora il modello lineare si determini l'equazione esplicita della retta grafico del numero totale y di morti (in milioni) in funzione del tempo t, che potrebbe servire per ulteriori studi, che qua non faremo.

SVOLGIMENTO

È usato lo standard della virgola decimale.
Abbiamo, con ovvio significato dei simboli,

$t_1 = 182 \; y_1 = 0.5$

$t_2 = 272$ $y_2 = 1$
e con l'equazione della retta

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{t - 182}{272 - 182} = \frac{y - 0{,}5}{1 - 0{,}5}$$

$$\frac{t - 182}{90} = \frac{y - 0{,}5}{0{,}5}$$

che è un'equazione implicita della retta cercata, e si può semplificare

$$\frac{t}{90} - \frac{182}{90} = \frac{y}{0{,}5} - 1 \qquad \Big/ \cdot 90$$

$$t - 182 = 180\, y - 90 \qquad \Big/ + 90$$

$$t - 92 = 180\, y \qquad \Big/ : 180$$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{180}\, t - \tfrac{23}{45}}$$

ESERCIZIO 3. $*$
Calcolare

$$\min\left(\sqrt{x} - \ln x\right)$$

SVOLGIMENTO
Data

$$f(x) := \sqrt{x} - \ln x \qquad x > 0 \text{ (dominio di } f)$$

la si deriva

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \qquad x > 0 \text{ (dominio di } f')$$

e si ha la disequazione $f'(x) > 0$ per $x > 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} > 0 \qquad \Big/ \cdot 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \text{ (} > 0 \text{ nel dominio)}$$

$$\sqrt{x} - 2 > 0 \qquad \Big/ + 2$$

$$\sqrt{x} > 2 > 0 \quad /^2$$

$$x > 4$$

$$f'(x) > 0: \qquad 0 - - - - - - 4 + + + + +$$

Allora la f è decrescente da 0 a 4 e crescente da 4 il poi, allora 4 è unico punto di minimo relativo e assoluto, e allora

$$\min f = f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 =$$

$$\boxed{2 - \ln 4}$$

(Che per le proprietà dei logaritmi si può esprimere anche come $2 - 2\ \ln 2$). (≈ 0.614).

ESERCIZIO 4. %

Per una malattia del piede una farmacia vende un farmaco "standard", un prodotto erboristico, un prodotto omeopatico, e una soletta da mettere nelle scarpe. Ciascuno dei prodotti ha una sua probabilità di successo (in senso frequentista ovviamente) dove il successo è definito in un qualche modo ragionevole di cui non ci occuperemo (per esempio, sostanziale miglioramento soggettivo in 4 settimane di terapia). Le probabilità di successo delle terapie (in un certo ordine considerate, qualunque esso sia nel caso specifico, non vogliamo qua propagandare qualche terapia, si scelga un ordine qualunque) sono 40%, 30%, 20%, 10%. Supponendo (semplicisticamente) l'indipendenza delle terapie, che probabilità c'è di ottenere il successo seguendole tutte?

SVOLGIMENTO

Si userà lo standard del punto decimale.

Con gli eventi complementari, dette 1, 2, 3 e 4 le terapie,

P(fallimento con la terapia 1) $= 0.6$
P(fallimento con la terapia 2) $= 0.7$
P(fallimento con la terapia 3) $= 0.8$
P(fallimento con la terapia 4) $= 0.9$

e per l'indipendenza

$P(\text{fallimento con tutte le terapie}) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.9 = 0.3024$
e con l'evento complementare
$P(\text{almeno 1 terapia ha successo}) = 0.6976$
e con una ragionevole approssimazione

$$\boxed{70\%}$$

ESERCIZIO 5. $*$
Un certo gene si presenta in 3 varianti V1, V2 e V3 ugualmente distribuite nella popolazione. Un'azienda è in grado di produrre a un buon prezzo un test biochimico che determina la variante a partire da un campione di saliva, ma finora la cosa non aveva alcun mercato. Adesso invece i ricercatori dell'azienda ipotizzano che la variante sia collegata a una certa malattia e allora potrebbe valere la pena applicare quel test per valutare la predisposizione individuale a quella malattia. Con grande spesa l'azienda si procura i campioni di saliva di 198 malati e trova:
60 variante V1
78 variante V2
60 variante V3.
Testare al consueto livello l'ipotesi nulla della distribuzione uniforme.

Tavola dei quantili del chi quadrato — 0.05

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68

SVOLGIMENTO
È usato lo standard del punto decimale.

L'ipotesi nulla H è l'uniforme distribuzione, che si spera che non valga:

$$H: \; (p_1 \, p_2 \, p_3 \,) = \left(\frac{1}{3} \, \frac{1}{3} \, \frac{1}{3} \right)$$

$$A: \; (p_1 \, p_2 \, p_3 \,) \neq \left(\frac{1}{3} \, \frac{1}{3} \, \frac{1}{3} \right)$$

Con $k = 3$, $n_1 = 60$, $n_2 = 78$, $n_3 = 60$ e $n = 60 + 78 + 60 = 198$ dobbiamo verificare se

$$n \, p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k \;\; et \;\; T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \, p_i)^2}{n \, p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

È $n\,p_i = 198 \cdot \frac{1}{3} > 5$ per $i = 1, 2, 3$. (La condizione è verificata).
Fissando $\alpha = 0.95$, si trova nella tavola il quantile d'interesse:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.05}(2) \approx 5.99$$

Statistica T_n:

$$T_{198} := \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_i - 198 \cdot \frac{1}{3})^2}{198 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{(60 - 198 \cdot \frac{1}{3})^2}{198 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(78 - 198 \cdot \frac{1}{3})^2}{198 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(60 - 198 \cdot \frac{1}{3})^2}{198 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{6^2 + 12^2 + 6^2}{66} = \frac{36}{11} \approx 3.27 \not> 5.99$$

Il quantile non è superato e allora

$$\boxed{\text{non si rifiuta al livello 0.05 l'ipotesi dell'uniforme distribuzione.}}$$

(Ovvero, al livello 95%, come altri direbbe).

Nota supplementare. L'ipotesi dell'uniforme distribuzione non viene rifiutata neppure al 90%, come si vedrebbe su una tavola più ricca:

su alcune tavole →	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
su altre tavole →	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
n				$\chi^2_{0.05}(1)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(1)$ ↓	
1	0.004	0.02	2.71	3.84	6.63
2	0.10	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	1.14	1.61	9.24	11.07	15.09
6	1.63	2.20	10.64	12.59	16.81
7	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	3.32?	4.17	14.68	16.92	21.67
10	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21
11	4.57	5.58	17.28	**19.68**	24.73
				↑ $\chi^2_{0.05}(11)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(11)$	

Purtroppo per l'azienda, la disomogeneità riscontrata nei dati non è statisticamente significativa. Con una tavola ancora più ricca si troverebbe che al livello 80%, molto scadente, l'ipotesi nulla è effettivamente rifiutata, e allora forse vale la pena investire per fare uno studio più ampio.