○ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

😎 In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
😎 In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu}$ $*$ Supponendo, come in generale viene affermato, che l'integratore alimentare zolfo MSM (o metilsulfonilmetano) contiene zolfo circa per il 34%, quanto zolfo c'è circa in una confezione da 125 g? (Solo risultato, con l'unità di misura, senza passaggi)

RISULTATO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

$$\boxed{42{,}5\ \text{g}}$$

(È stato ottenuto calcolando $125 \cdot 0{,}34$).

ESERCIZIO 0b$_\mu$ $^{\%}$ Calcolare P(1 moneta lanciata 2 volte dà 2 croci) (Solo risultato, senza passaggi).

RISULTATO

$$\boxed{25\%}$$

(È stato ottenuto calcolando P(croce nei 2 lanci) $= P$(croce al primo lancio)$\cdot$ P(croce al secondo lancio) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ per l'indipendenza).

ESERCIZIO 0c$_\mu$ $*$ Qual è più grave, l'errore di prima specie o l'errore di seconda specie? (Solo risultato).

RISULTATO

$$\boxed{\text{L'errore di prima specie}}$$

(È un fatto ben noto).

ESERCIZIO 1$_\mu$ $*$

Se un millilitro ovvero centimetro cubo d'acqua corrisponde a 20 gocce, e supponendo sferica una goccia, trovarne il diametro.

L'unità d misura, cm, deve essere scritta esplicitamente nel risultato.

(In Farmacia e Medicina si ritiene in generale che 1 millilitro d'acqua corrisponda a 20 gocce. **Non c'è alcuna garanzia che ciò sia un fatto sempre vero, che siano sempre esattamente 20, ma di questo non ci occupiamo.** Con sostanze diverse dall'acqua distillata il numero 20 può cambiare molto ma non ce ne occupiamo. E naturalmente nel campo gravitazionale la forma non sarà esattamente sferica ma non ce ne occupiamo).

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

Il volume di 1 goccia è $\frac{1}{20}$ di centimetro cubo, cioè 0,05 cm^3 ovvero ml, e ricordando il volume della sfera abbiamo l'equazione nell'incognito raggio r

$$\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 = \frac{1}{20} \qquad \Big/ \cdot \frac{3}{4\,\pi}$$

dove r è in cm, e $\frac{1}{20} = 0{,}05$ in cm^3, ma facciamo i calcoli senza unità di misura

$$r^3 = \frac{3}{4\,\pi} \cdot \frac{1}{20} \qquad \Big/ \sqrt[3]{\ }$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{80\,\pi}}$$

e moltiplicando per 2 per avere il diametro invece del raggio

$$\boxed{2 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{3}{80\,\pi}} \text{ cm}}$$

e l'esercizio sarebbe finito.

Tuttavia possiamo esprimere meglio la soluzione trovata, facendo "entrare" il 2 sotto la radice cubica, con l'uguaglianza $2 = \sqrt[3]{8}$, e 8 si semplifica con 80,

$$\boxed{\sqrt[3]{\tfrac{3}{10\,\pi}} \text{ cm}}$$

(Numericamente sono ≈ 0.46 cm, circa mezzo centimetro di diametro).

Nota. La soluzione può venire validamente ma meno bene espressa, usando 0,05 invece di $\frac{1}{20}$,

$$\boxed{2 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{0{,}0375}{\pi}} \text{ cm}}$$

e anche, di nuovo facendo entrare il 2 sotto radice,

$$\boxed{\sqrt[3]{\tfrac{0,3}{\pi}}\ \text{cm}}$$

ESERCIZIO 2$_\mu$ $\approx$
Risolvere l'equazione

$$\cos\pi + \sqrt[4]{3{,}8416} + x\ \lg\frac{1}{2} = 0$$

dando la soluzione approssimata con 2 decimali. Potrà essere utile questa tavola di valori notevoli:

α	0°	90°	180°	270°
$\cos\alpha$	1	0	-1	0

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard della virgola decimale.

Sperabilmente si ricorderà che un angolo pari π (radianti) misura 180° (è l'angolo piatto) oppure lo si ricava ricordando che l'angolo (giro) di 360° corrisponde a $2\,\pi$ (radianti). (Oppure ancora, lo si ricava dalla nota proporzione che consente la conversione fra gradi e radianti $\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x°$).
Poi dalla tabella ricaviamo (o si sa a memoria)

$$\cos\pi = \cos 180° = -1$$

La radice quarta è la radice quadrata della radice quadrata:

$$\sqrt[4]{3{,}8416} = \sqrt{\sqrt{3,8416}} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

Allora abbiamo l'equazione

$$-1 + 1{,}4 = -x\ \lg\frac{1}{2}$$

da cui

$$x = -\frac{0{,}4}{\lg\frac{1}{2}}$$

che è la soluzione esatta, e ricordando che $\lg\frac{1}{t} = -\lg t$

$$x = \frac{0{,}4}{\lg 2}$$

che ancora è la soluzione esatta, e ricordando il valore approssimato $\lg 2 \approx 0{,}3$ si trova, con 2 decimali come richiesto,

$$\boxed{\approx 1{,}33}$$

(Un valore più preciso che si trova col computer è ≈ 1.32877).

ESERCIZIO 3_μ $*$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(0.476+0.524\,\mathrm{e}^{-1.878\,x}\right)$$

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(0.476+0.524\,\mathrm{e}^{-1.878\,x}\right)$$

l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$ e allora l'esponenziale a 0 (ciò che alcuni scrivono, seppure con scrittura discutibile, $\mathrm{e}^{-\infty}=0$)

$$=0.476+0.524\cdot 0=$$

$$\boxed{0.476}$$

ESERCIZIO 4_μ %

Che probabilità c'è, molto approssimativamente, che una variabile aleatoria normale standard assuma un valore distante più di 2 da 0?

SVOLGIMENTO

Il distare di X da 0 più di 2 è espresso da $|X-0|>2$ ovvero $|X|>2$ e ne cerchiamo la probabilità:

$$P(|X|>2)=$$

con l'evento complementare

$$=1-P(|X|\le 2)=$$

per algebra del valore assoluto

$$=1-P(-2\le X\le 2)=$$

e ricordando la fondamentale $P(-2\le X\le 2)\approx 95\%$ si conclude

$$\boxed{\approx 5\%}$$

Nota. L'esercizio è finito, perchè era richiesto un valore molto approssimativo. Ma possiamo osservare che quel valore 5% corrisponde molto meglio al distare di X da 0 più di 1.96 piuttosto che 2, con la $P(-1.96 \le X \le 1.96) \approx 95\%$ ovvero

$$P(|X| > 1.96) \approx 5\% \qquad \text{(oppure con } \ge \text{)}$$

Se volessimo risolvere l'esercizio con maggior precisione, ricordiamo lo scarto di $2\,\sigma$ dalla media μ di una v.a. normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$P(|X - \mu| \le 2\,\sigma) \approx 95.4\%$$

(quello che compare approssimato a 95% nei calcoli prima fatti e nella "Regola 68-95-97.5") e con l'evento complementare

$$P(|X - \mu| > 2\,\sigma) \approx 4.6\%$$

$$\boxed{\approx 4.6\%}$$

essendo ora $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.
(Si noti che 95% e 95.4% sono molto simili, ma le probabilità complementari 5% e 4.6% non sono poi così simili).

ESERCIZIO 5$_{\mu} \approx$
Dato questo campione aleatorio

$$0.5288, 0.0344, 0.6112, 0.072, 0.4584, 0.5104, 0.7296$$

di una variabile aleatoria Z uniformemente distribuita sull'intervallo $[0, a]$, stimare a con lo stimatore dei momenti, con 4 cifre decimali.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

Lo stimatore dei momenti è il doppio della media aritmetica.

(Ovvero in formule, per una v.a. Z, $\hat{a} := 2\,\frac{Z_1+\ldots+Z_n}{n} = 2\,\bar{Z}_n$).
La media degli $n = 7$ numeri è

$$\bar{Z}_7 = \frac{0.5288 + 0.0344 + 0.6112 + 0.072 + 0.4584 + 0.5104 + 0.7296}{7} \approx 0.420686$$

e moltiplicando per 2, si ha, con 4 cifre decimali,

$$\hat{a} = 2\,\bar{Z}_7 =$$

$$\boxed{\hat{a} \approx 0.8414}$$

Nota. (Il campione era stato ottenuto con $a = 0.8$ con l'istruzione

```
v = Table[0.8 RandomInteger[1000]/1000., i, 1, 7]
```

col software Mathematica$^{(R)}$).