○ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati <u>e diverso docente</u> e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.**

Chi si ritira, consegna **<u>solo</u>** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

**In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.**

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_\mu$ (R) $^{\%}$ Lo sconto di 80 centesimi su 4 euro, in percentuale quant'è?

$\boxed{20\%}$

(Si tratta di 80 centesimi su 400, cioè $\frac{1}{5} = 0.2$).

ES. 0b$_{\mu}$ (R) $*$ $D \cos x$

$$\boxed{-\sin x}$$

(È ben noto).

ES. 0c$_{\mu}$ (R) $*$ P(dado dà 1 o 6)

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

(I casi favorevoli sono 2, e quelli possibili 6, da cui $\frac{2}{6}$).

ES. 1$_{\mu}$ $*$ Il numero di morti giornaliero di un'epidemia sia modellizzato molto approssimatamente, per $1 \le t \le 206$, da

$$m(t) = -t^2 + 207\,t - 205$$

Si trovi per quanto tempo i morti sono stati più di 10 000 al giorno risolvendo un'equazione di secondo grado, usando il valore 10 001. Si esprima la soluzione a parole, con un'espressione del tipo "per circa 3 settimane" o "per circa 2 mesi" o "per circa 1 anno e mezzo" (che sono solo esempi, nessuno è quello esatto). (È richiesta una frase *esatta* che esprime la soluzione *approssimatamente*, come negli esempi).
Ovviamente t è il numero del giorno, da $t = 1$, primo giorno dell'epidemia, con con $m(1) = 1$ morto, e l'andamento del grafico è una parabola, prima sale e poi scende, e il numero di morti è di nuovo 1 al giorno $t = 206$.

SVOLGIMENTO
Abbiamo l'equazione di secondo grado

$$-t^2 + 207\,t - 205 = 10\,001$$

ovvero

$$-t^2 + 207\,t - 10\,206 = 0$$

che dà

$$\Delta = 207^2 - 4 \cdot 10\,206 = 42\,849 - 40\,824 = 2\,025$$

cui corrispondono

$$t_{1,2} = \frac{-207 \pm \sqrt{2\,025}}{-2} = \frac{-207 \pm 45}{-2}$$

$$t_1 = 81 \qquad t_2 = 126$$

e per tutti i giorni dall'81 al 126 ci sono 10 001 o più morti, cioè più di 10 000 morti.
Quei giorni sono in numero di $126 - 80 = 46$:

$$\boxed{\text{per circa un mese e mezzo}}$$

Nota 1. 46 giorni non si esprime affatto bene in settimane, nè circa 6 nè circa 7. È proprio circa un mese e mezzo. (Un mese "standard" ha 30 giorni).
Nota 2. I giorni con più di 10 000 morti sono proprio $46 = 126 - 80$ cioè quelli dall'81 al 126, non $45 = 126 - 81$, perchè al giorno 81 i morti sono già più di 10 000. (Sono 10 001, come al giorno 126).
Nota 3. E troviamo infatti, a mano o con la calcolatrice, sebbene non sia affatto necessario:

$m(1) = 1$
...
$m(80) = 9\,955$ (non ancora raggiunti i 10 000 morti al giorno)
`x` $m(81) = 10\,001$
`x` ...
`x` (in questo periodo con le `x` ci sono più di 10 000 morti al giorno)
`x` ...
`x` $m(126) = 10\,001$
$m(127) = 9\,955$ (ormai meno di 10 000 morti al giorno)
...
$m(206) = 1$

Il periodo con un numero di morti maggiore di 10 000 va dal giorno 81 (compreso) al giorno 126 (compreso), e sono $126 - 81 + 1$ cioè 46 giorni.

ES. 2$_{\mu}$ $\approx$ In una statistica relativa all'epidemia si considerano varie regioni geografiche e per ciascuna il numero di casi:
911,146; 74,423; 5,454; 569,060; 97,172; 83,374; 146,317; 33,479; 87,358; 226,836; 827,052; 292,394
Trovare la media interquartile.

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Non è possibile usare lo standard della virgola decimale perchè la virgola è già usata come separatore delle migliaia; è ovvio che non è virgola decimale perchè il numero di casi in ogni regione è intero).
Naturalmente si continuerà a usare la virgola separatrice delle migliaia come nel testo del quesito.

Riordiniamo i numeri in modo crescente:

$$5{,}454,\ \ 33{,}479,\ \ 74{,}423,\ \ 83{,}374,\ \ 87{,}358,\ \ 97{,}172,$$

$$146{,}317,\ \ 226{,}836,\ \ 292{,}394,\ \ 569{,}060,\ \ 827{,}052,\ \ 911{,}146$$

ed eliminando il primo e il quarto quartile ci restano i 6 numeri

$$83{,}374,\ \ 87{,}358,\ \ 97{,}172,\ \ 146{,}317,\ \ 226{,}836,\ \ 292{,}394$$

la cui media aritmetica è

$$\approx 155{,}575.167$$

che con una ragionevole approssimazione dà il risultato finale

$$\boxed{\approx 155{,}575}$$

meno bene espresso, in questo caso, con lo spazietto separatore delle migliaia

$$\boxed{\approx 155\,575}$$

(che in generale invece è migliore della virgola separatrice delle migliaia).
E ancora meno bene espresso con decimali dopo la parte intera, irrilevanti:

$$\approx 155{,}575.167$$

(Quei decimali esprimono sostanzialmente “un sesto di caso”, irrilevante sui 155,575, numero che molto bene esprime approssimatamente la media interquartile).
Nota . Chi erroneamente intende che nel quesito era usata la virgola decimale fraintende completamente il risultato, sottovalutandolo di un fattore 1 000. A rischio pure di fare una pseudo-approssimazione del risultato a 155.58 o 155.6 o 156. (Sono in effetti circa 156mila casi, non circa 156).

ES. 3$_{\mu}$ $\approx$ Trovare il punto di minimo di $g(t) := t - \lg t$.

SVOLGIMENTO
Nota 0. Si noti che è richiesto (semplicemente) il punto di minimo (cioè un certo valore $t = t_0$) e non il minimo (cioè $f(t_0)$).

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

Prima di tutto deve essere

$$t > 0.$$

Ricordando la $D\,x = 1$ e la

$$D \lg x = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \qquad (*)$$

abbiamo la disequazione in $]0, +\infty[$

$$g'(t) = 1 - \frac{\lg \mathrm{e}}{t} > 0 \qquad \Big/ \cdot t > 0$$

$$t - \lg \mathrm{e} > 0 \qquad (t > 0)$$

$g'(t) > 0 :$ $\qquad t > \lg \mathrm{e}$
allora $g(t)$ cresce da $\lg \mathrm{e}$ in poi, e decresce da 0 a quel valore, e allora quel valore è il punto di minimo cercato.
È richiesto il valore approssimato, che è il classico

$$\boxed{\approx 0{,}4343}$$

Nota 1. Se non ci ricordiamo la $(*)$ applichiamo la formula di cambiamento di base

$$\lg x = (\lg \mathrm{e})\ \ln x \qquad (**)$$

che, derivando, dà la $(*)$, perchè $\lg \mathrm{e}$ è una costante, un numero.
Nota 2. Se non ci ricordiamo nè la $(*)$ nè la $(**)$ applichiamo la formula approssimata di cambiamento di base

$$\lg x \approx 0{,}4343 \ln x$$

che, con passaggio molto azzardato, derivando dà

$$D \lg x \approx 0{,}4343 \cdot \frac{1}{x}$$

che permette di continuare e trovare lo stesso risultato di prima. Però il passaggio è molto azzardato: in questo caso funziona bene, ma non è sempre vero che se una funzione vale *circa* come un'altra, ciò sia vero per le loro derivate. Per esempio non è vero per le funzioni $1+x^2$ e $1+x^2+10^{-6}\cos(10^6\,x)$, che hanno derivate ben diverse $1+2\,x$ e $1+2x-\sin(10^6\,x)$, benchè la prima funzione considerata approssimi la seconda con errore relativo $< 0.0001\%$.

ES. 4$_{\mu}^{\%}$ Si consideri una variabile aleatoria Z di densità $f(t) = t$ per $1 \le t \le \sqrt{3}$, e 0 altrimenti. Calcolare $P\left(Z < \frac{3}{2}\right)$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

$$P\left(Z < \frac{3}{2}\right) =$$

con $<$ oppure $\le$ vale uguale perchè Z è una variabile aleatoria continua

$$= P\left(Z \le \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} \text{densità} =$$

la densità è 0 prima di $t = 1$ e dopo $t = \sqrt{3} \approx 1.73$ ma $\frac{3}{2} = 1.5$ è più piccolo

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} t\, dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{9-4}{8} =$$

$$= \frac{5}{8} = 0.625 =$$

$$\boxed{62.5\%}$$

ES. 5$_{\mu}$ $*$ Supponiamo che per un test statistico relativo alla pandemia 2020-21, con ipotesi (nulla) H_0 e alternativa H_1, al livello $\alpha = 0{,}001$, la regione critica sia definita da $T > 30{,}215$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 38,387, e che sia vera H_1. Quale delle seguenti affermazioni é vera?

- Non è possibile rispondere perchè non è specificato il test usato
- Non è possibile rispondere perchè non si sa se il campione è gaussiano
- Non è possibile rispondere perchè $\alpha \neq 5\%$
- Non è possibile rispondere perché non é specificato il quantile
- Non si può applicare un test statistico per una malattia nuova
- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. (Nei numeri 30,215 e 38,387 la virgola potrebbe essere separatore delle migliaia ma non nel numero 0,001).

Lo stimatore T vale $38,387$ che $\in$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) é falsa (perché é vera l'alternativa). Allora *"bene respingo ipotesi falsa"*, cioé

$$\boxed{\text{Era il caso in generale sperato}}$$