○ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati <u>e diverso docente</u> e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.**

Chi si ritira, consegna <u>solo</u> questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale. Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_\mu$ (R) $^{\%}$ Quant'è lo sconto da \$ 300 a \$ 255?

$\boxed{15\%}$

(Vengono scontati $\$\,300 - \$\,255$ su $\$\,300$, cioè $\frac{45}{300} = 0.15$).

ES. 0b$_\mu$ (R) $*$ Calcolare $\log_{10}(x\,y) - \log_{10} x - \log_{10} y$

$$\boxed{0}$$

(La proprietà fondamentale del logaritmo LOG, in qualunque base, è proprio $\mathrm{LOG}(x\,y) = \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)$).

ES. 0c$_\mu$ (R) $*$ P(una moneta lanciata 3 volte dà sempre testa)

$$\boxed{\tfrac{1}{8}}$$

(Perchè $= P(\text{T al lancio n.1}) \cdot P(\text{T al lancio n.2}) \cdot P(\text{T al lancio n.3})$).

ES. 1$_\mu$ $\approx$ Calcolare la media interquartile delle radici quadrate dei primi 12 numeri naturali 0, 1, 2,..., 11.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale).

Le radici quadrate dei primi 12 numeri naturali $0, 1, 2, ..., 11$ sono, già scritte in ordine crescente,

$$0, 1, \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \quad \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \quad 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}$$

ed eliminando il primo e il quarto quartile restano i 6 numeri

$$\sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$$

che, a parte il 2, calcoliamo approssimativamente con la calcolatrice:

$$1.73205,\ 2, 2.23607,\ 2.44949,\ 2.64575,\ 2.82843$$

Infine facciamo la media aritmetica dei 6 numeri:

$$\boxed{\approx 2.3153}$$

ES. 2$_{\mu}$ $*$ Quante sono le sequenze di 5 lettere dell'alfabeto $\{A, C, G, T\}$?

SVOLGIMENTO

La 1^a lettera può essere scelta in 4 modi,
la 2^a lettera può essere scelta in 4 modi,
eccetera, e allora

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

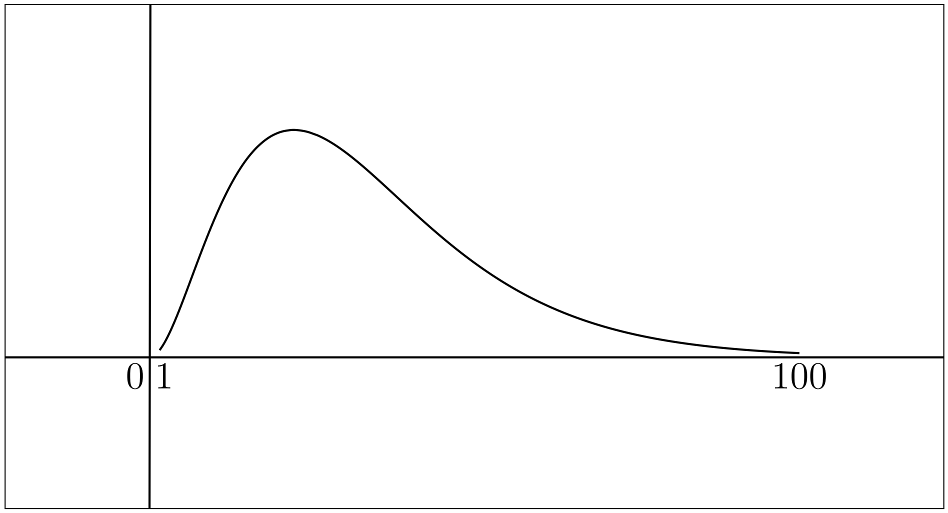
$$\boxed{1024}$$

Nota. Naturalmente le lettere possono tipicamente corrispondere agli aminoacidi del DNA, di cui nell'esercizio si considera una sequenza di lunghezza 5.

ES. 3$_{\mu}$ $*$ Il numero di morti di un'epidemia viene modellizzato approssimatamente da

$$d(t) := 20\, t^2\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \qquad 1 \leq t \leq 100$$

essendo t il tempo, in giorni, da 1 a 100. In quale giorno si ha il massimo numero di morti? (Più realisticamente, *intorno* a quale giorno; ma usiamo proprio il modello semplificato assegnato). (Ovviamente sono usati i nomi d come *deaths* e t come *time*; ma è irrilevante).
Si risolva con le derivate, sebbene si potrebbe risolvere calcolando i 100 valori di $d(t)$ per t da 1 a 100. Sarà utile ricordare che $D\, \mathrm{e}^{c\,t} = c\, \mathrm{e}^{c\,t}$ (che comunque si troverebbe subito con la regola di derivazione della funzione composta).



SVOLGIMENTO

Ricordando la derivazione del prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

e ricordando la derivazione di t^2 che dà $2\,t$, deriviamo la funzione $d(t)$ che è il prodotto $(20\,t^2) \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$ ottenendo la disequazione $d'(t) > 0$

$$d'(t) = (40\,t) \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right) + (20\,t^2) \cdot \left(-\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right) > 0$$

$$\Big/ : t > 0 \qquad \text{(dividiamo per } t > 0 \text{ nel dominio)}$$

$$40\,e^{-\frac{t}{10}} - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0 \qquad \Big/ : \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$$

$$40 - 2\,t > 0$$

$$40 > 2\,t$$

$$t < 20$$

allora il numero di morti $d(t)$ in $[1, 100]$ cresce per $t < 20$ e decresce per $t > 20$ e allora raggiunge il massimo

$$\boxed{\text{al giorno 20}}$$

Nota. Il modello darebbe circa 1083 morti in quel giorno, calcolando $d(20)$, più precisamente 1082.68: ovviamente la funzione modellizza approssimatamente il numero di morti, che in generale sarà da aspettarsi con ampie fluttuazioni intorno al valore teorico.

ES. 4$_{\mu}$ $^{\%}$ Calcolare la probabilità che la somma di 100 variabili aleatorie normali standard superi il valore 19,6.

SVOLGIMENTO

È usato lo standard della virgola decimale. (E con quello continuiamo).

Ricordando l'Approssimazione Normale

$$P\Big(X_1 + ... + X_n \leq x\Big) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

ora con $n = 100$, $\mu = 0$, e $\sigma^2 = 1$ ovvero $\sigma = 1$,

$$P\Big(X_1 + ... + X_{100} \leq 19.6\Big) \approx \Phi\left(\frac{19{,}6 - 100 \cdot 0}{1 \cdot \sqrt{100}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{19{,}6}{10}\right) \approx \Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$$

e l'ultimo è un valore classico, da sapere a memoria in una delle 2 forme equivalenti

$$\phi_{0{,}975} \approx 1{,}96 \quad \text{ovvero} \quad \Phi(1{,}96) \approx 0{,}975.$$

Poi con la probabilità dell'evento complementare

$$P\Big(X_1 + ... + X_{100} > 19{,}6\Big) \approx 1 - 0{,}975 = 0{,}025$$

e infine in percentuale

$$\boxed{\approx 2{,}5\%}$$

ES. 5$_{\mu}$ $*$ Testare l'ipotesi nulla dell'uniforme distribuzione per il campione 18 35 22.

Tavola dei quantili del chi quadrato — 0.05

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68

SVOLGIMENTO

È usato lo standard del punto decimale.

L'ipotesi nulla H è l'uniforme distribuzione, che si spera di respingere:

$$H: \ (p_1 \, p_2 \, p_3 \,) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A: \ (p_1 \, p_2 \, p_3 \,) \neq \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e A è l'alternativa.

Con $k = 3$, $n_1 = 18$, $n_2 = 35$, $n_3 = 22$ e $n = 18 + 35 + 22 = 75$ dobbiamo verificare se

$$n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k \ \wedge \ T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

È $n\,p_i = 75 \cdot \frac{1}{3} = 25 > 5$ per $i = 1, 2, 3$: la condizione è verificata, abbondantemente (e alcuni Autori richiedono la condizione > 10 invece che > 5).
Fissando il classico $\alpha = 0.95$, si trova nella tavola il quantile d'interesse:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.05}(2) \approx 5.99$$

Statistica T_n:

$$T_{75} := \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_i - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{(18 - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(35 - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(22 - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{7^2 + 10^2 + 3^2}{25} = \frac{158}{25} \approx 6.32 > 5.99$$

Il quantile è superato e allora

si respinge al livello 0.05 l'ipotesi dell'uniforme distribuzione.

(Ovvero, al livello 95%, come altri direbbe). (Si *respinge*, o si *rifiuta*).