RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

○ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_\mu$ (R) $*$ Mediana del dataset 4, 4, 9, 12, 16, 25, 0.

$$\boxed{9}$$

(Dato centrale del dataset riordinato in senso crescente 0, 4, 4, 9, 12, 16, 25).

ES. 0b$_\mu$ (R) $*$ Dire qual è il minimo della funzione x^2

$$\boxed{0}$$

(La funzione x^2 è sempre ≥ 0 e in 0 vale 0 che allora è il minimo).

ES. 0c$_{\mu}$ (R) $*$ Probabilità di non ottenere mai 3 in 2 lanci di dado

$$\boxed{\frac{25}{36}}$$

(È la probabilità composta P(non 3 al primo lancio $\wedge$ non 3 al secondo lancio)= P(non 3 al primo lancio)$\cdot P$(non 3 al secondo lancio)$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$).

ES. 1$_{\mu}$ $*$ Con riferimento al covid-19, con p =“1 dose di vaccino”, q =“2 dosi”, r =“3 dosi”, s =“almeno una dose”, u =“contagiato”, v =“ammalato”, e ovviamente “ammalato”$\Rightarrow$“contagiato”, trovare il valore di verità V o F di

$$(u \wedge \neg s) \vee (v \wedge r)$$

per soggetto con 2 dosi (forse “scadute” ma non ce ne occupiamo) ammalato. (Ovviamente con “(ha ricevuto) n dosi” intendiamo <u>esattamente</u> n).

SVOLGIMENTO
u: V, vero, è contagiato perchè ammalato
s: V, vero, ha almeno 1 dose perchè ha 2 dosi
v: V, vero, è ammalato
r: F, falso, non ha 3 dosi perchè è un soggetto con 2 dosi
(non useremo p, q).

$$(V \wedge \neg V) \vee (V \wedge F)$$

$$(V \wedge F) \vee F$$

$$F \vee F$$

$$\boxed{F}$$

ES. 2$_{\mu}$ $*$ L'equazione che modellizza la concentrazione di una sostanza nel sangue a partire dall'inoculazione al tempo 0 sia (il che è alquanto plausibile almeno in via approssimata)

$$u(t) := 3\,\mathrm{e}^{-2t}$$

(con $u(t)$ e t adimensionali e cioè senza unità di misura, ma si può immaginare che t sia per esempio in ore). Dopo quanto tempo dal momento iniziale la concentrazione è ridotta del 90%? (Ovvero, al 10%). Si esprima la soluzione in modo ordinato, usando solo i numeri interi e i logaritmi e le 4 operazioni.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).
Abbiamo l'equazione

$$\text{concentrazione finale} \stackrel{EQ}{=} 10\% \text{ della concentrazione iniziale}$$

cioè, scrivendo 0.1 per 10%, l'equazione in t

$$u(t) = 0.1 \cdot u(0)$$

cioè

$$
\begin{aligned}
3\,\mathrm{e}^{-2\,t} &= 0.1 \cdot 3\,\mathrm{e}^{-2\cdot 0} && \Big/ : 3 \\
\mathrm{e}^{-2\,t} &= 0.1 \cdot \mathrm{e}^{0} \\
\mathrm{e}^{-2\,t} &= 0.1 && \Big/ \ln \\
-2\,t &= \ln(0.1) && \Big/ : (-2) \\
t &= -\frac{1}{2}\,\ln(0.1) =
\end{aligned}
$$

e possiamo già essere abbastanza soddisfatti perchè questa è la soluzione esatta, seppure non bene espressa, e allora continuiamo, riconoscendo che 0.1 è un decimo:

$$\boxed{= -\tfrac{1}{2}\,\ln\tfrac{1}{10}}$$

espressione non molto bella che miglioriamo ancora ricordando la formula del logaritmo dell'opposto

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-\ln 10) =$$

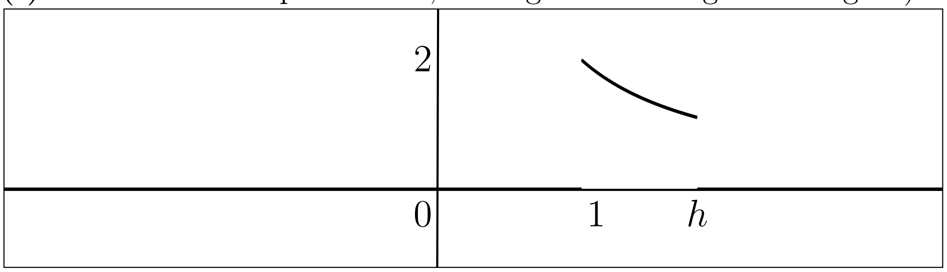
$$\boxed{\tfrac{1}{2}\ln 10}$$

(≈ 1.15, con la calcolatrice oppure trovando $\ln 10$ dalla $\lg x \approx 0.4343\,\ln x$).

ES. 3$_{\mu}$ $\approx$ Trovare $h > 1$ affinchè l'integrale di $f(t)$ da $-\infty$ a $+\infty$ valga 1:

$$f(t) := \begin{cases} \frac{2}{t} & se\ 1 \le t \le h \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(Così $f(t)$ è una densità di probabilità, il cui grafico è disegnato in figura).



SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).
L'uguaglianza (a rigore, equazione, seppure l'incognita non appare)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{t}\, dt$$

dà l'equazione nell'incognita $h > 1$

$$1 = \int_{1}^{h} \frac{2}{t}\, dt$$

e riconoscendo che (ovviamente) $2 \ln |t|$ è primitiva di $\frac{2}{t}$

$$1 = \Big[2 \ln |t| \Big]_1^h$$

$$1 = 2 \ln |h| - 2 \ln |1|$$

e osservando che $h > 1 > 0$ e $\ln 1 = 0$

$$1 = 2 \ln h \qquad \Big/ : 2$$

$$\ln h = \frac{1}{2} \qquad \Big/ \exp$$

$$h = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

che è la soluzione esatta, che adesso esprimiamo diversamente:

$$h = \sqrt{\mathrm{e}}$$

in modo da poterla approssimare, come richiesto:

$$h \approx \sqrt{2.718}$$

$$\boxed{\approx 1.649}$$

o anche, più prudentemente,

$$\boxed{\approx 1.65}$$

(Con inopportuna prudenza ≈ 1.6, arrotondamento di $\sqrt{2.718} = 1.6486....$ con 1 solo decimale).

ES. 4_{μ} $^{\%}$ Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	252	20
NEGATIVI	42	484

Calcolare la specificità del test.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).
Ricordando la definizione della specificità

$$Sp := \frac{veri\ negativi}{totale\ sani} = \frac{V_-}{V_- + F_+} =$$

coi dati del quesito

$$= \frac{484}{484 + 20} =$$
$$= \frac{484}{504} \approx$$

con la calcolatrice con ragionevole approssimazione

$$\approx 0{,}96$$

e in percentuale come richiesto

$$\boxed{\approx 96\%}$$

ES. 5_{μ} $\star$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A, al livello $\alpha = 0.05$, la regione critica sia $[10{,}321, +\infty[$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 8,372, e che sia vera A. Cosa si conclude?

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. (Questo si vede da 0.05, e allora in 10,321 e 8,372 la virgola è separatore delle migliaia).
Lo stimatore T vale 8,372 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) è falsa (perché è vera l'alternativa). Allora *"male non respingo ipotesi falsa"*, cioè

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$